الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

مشتقّات التوابع المألوفة

بسيطة

القواعد تعرفها، والجديد هو ما لا تقوله: شرطٌ كافٍ ليس لازماً، وطرفٌ يحتاج التعريف

التوابع: الاشتقاق . الوحدة 3 . الدرس 2

قواعد الاشتقاق التي في هذا الدرس رأيتها في الصفّ السابق، والكتاب يعرضها من دون برهان لأنّها تذكرة. فلماذا درسٌ كامل؟ لأنّ الخطأ في البكالوريا نادراً ما يكون في القاعدة نفسها، بل في حدودها. المبرهنة تقول متى يكون الجداء اشتقاقياً، ولا تقول متى لا يكون. وهي تعطيك مجالاً مفتوحاً وتسكت عن طرفه. والمصحّح لا يسأل عن المشتق وحده، بل عن المجموعة التي حسبته عليها. هذا الدرس عن هذه الثلاثة، والجدول المرجعي في آخره للنظر السريع لا للحفظ.

عمليّات على المشتقّات

ليكن u و v تابعين اشتقاقيَّين على D ، حيث D مجالٌ أو اجتماعُ مجالاتٍ، وليكن k عدداً حقيقيّاً. عندئذٍ يكون كلٌّ من ku و $u+v$ و uv اشتقاقيّاً على D .

مبرهنة 1

$(ku)' = k\,u'$ العدد الثابت يخرج من الاشتقاق كما هو.

$(u+v)' = u' + v'$ الاشتقاق يوزّع على الجمع.

$(uv)' = u'v + uv'$ ولا يوزّع على الجداء. حدّان لا حدٌّ واحد، وهذا أكثر ما يُنسى.

$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ بشرط ألّا ينعدم v في D .

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ بالشرط نفسه. انتبه إلى ترتيب الحدّين في البسط، فالطرح غير مبدّل.

الكتاب، الصفحة 70

تذكّر: وعلى الخصوص: التوابع كثيرات الحدود اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ ، والتوابع الكسريّة اشتقاقيّة على مجموعة تعريفها. هاتان الجملتان تختصران أكثر أسئلة البكالوريا في هذا الباب، ولا تحتاج معهما إلى حساب.

ولكثير الحدود $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ نشتقّ كلَّ حدٍّ على حدته ثمّ نجمع الحدود الناتجة.

$$P'(x) = n\,a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

ما مشتقّ الجداء uv ؟

كيف أبدأ؟ امتحن الصيغ بدل أن تتذكّرها. خذ $u = v = x$ ، فيصير الجداء x^2 ومشتقّه معلومٌ لك من سطر x^n في الجدول المرجعيّ، ثمّ احسب ما تعطيه كلٌّ من الصيغ الثلاث عند هذا الاختيار وقارن.

أ) $u'v'$

ب) $u'v + uv'$

ج) $u'v - uv'$

ب. نعم، حدّان. اشتقّ الأوّل واترك الثاني، ثمّ اترك الأوّل واشتقّ الثاني، ثمّ اجمع.

شرطٌ كافٍ، وما لا تقوله المبرهنة

يسأل الكتاب سؤالاً يستحقّ الوقوف: لماذا تكون المبرهنة 1 غير مُجدية أحياناً عندما ندرس قابليّة الاشتقاق في نقطة؟

لأنّها لا تعطي سوى شروطٍ كافية. هي تنصّ على أنّه إذا كان u و v اشتقاقيَّين على D ، كان uv اشتقاقيّاً على D .

لكنّها لا تقول العكس: إذا لم يكن u أو v اشتقاقيّاً على D ، فلن يكون uv اشتقاقيّاً على D .

تذكّر: وعليه، قد يكون الجداء uv اشتقاقيّاً عند نقطةٍ دون أن يكون u أو v اشتقاقيّاً في تلك النقطة. المبرهنة تفتح باباً ولا تغلق غيره.

انتبه: هذا الفرق بين «شرطٍ كافٍ» و«شرطٍ لازم» هو أكثر ما يُخطئ فيه الطلّاب في البراهين، لا في هذه الوحدة وحدها. كلّما قرأت مبرهنة على صورة «إذا كان A فإنّ B »، فهي لا تقول شيئاً عن الحالة التي لا يتحقّق فيها A .

التابع u غير اشتقاقيٍّ عند 0 . ماذا نستنتج عن uv عند 0 ؟

كيف أبدأ؟ ارجع إلى صيغة المبرهنة 1 وافصلها إلى جزأين: فرضُها هو أن يكون u و v اشتقاقيَّين، ونتيجتها هي اشتقاق الجداء. المعطى هنا يُسقط الفرض، والسؤال الذي يحسم: هل تتكلّم مبرهنةٌ على صورة «إذا كان A فإنّ B » عن الحالة التي لا يتحقّق فيها فرضها أصلاً؟

أ) أنّه غير اشتقاقيٍّ عند 0

ب) أنّه اشتقاقيٌّ عند 0

ج) لا نستنتج شيئاً، وتلزم دراسةٌ بالتعريف

ج. نعم. المبرهنة صامتة هنا، والطريق الوحيد هو حساب نهاية الكسر $\dfrac{f(h) - f(0)}{h}$.

عند الطرف، عُد إلى التعريف

الحالة الثانية التي تسكت فيها المبرهنة هي طرف المجال. تعطيك المبرهنة الاشتقاق على مجالٍ مفتوح، فتظنّ أنّ الطرف خارجٌ حتماً. ليس حتماً: هي لا تنفي شيئاً عنه.

هذا مثال الكتاب على الصفحة 72 ، وهو النموذج الذي يتكرّر في البكالوريا كلّما ظهر جذرٌ عند طرف مجال. لنتأمّل التابع f المعرّف على $[0, +\infty[$.

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

1. ما تعطيه المبرهنة التابع f هو جداء ضرب التابعين $x \mapsto x$ الاشتقاقي على $\mathbb{R}$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ الاشتقاقي على $]0, +\infty[$. إذن f اشتقاقي على $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

2. ما لا تعطيه تؤكّد المبرهنة وجود f' على $]0, +\infty[$ ، لكنّها لا تنفي قابليّة الاشتقاق عند الصفر. الصفر طرفُ المجال، والمبرهنة لم تتكلّم عنه أصلاً.

3. العودة إلى التعريف لدراسة الاشتقاق عند الصفر نعود إلى تعريف العدد المشتق ونبسّط الكسر. لاحظ أنّ $f(0) = 0$.

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$$

4. النتيجة نهاية $\sqrt{h}$ عندما تسعى h إلى الصفر هي الصفر، فالتابع f اشتقاقيٌّ عند الصفر ومشتقّه هناك يساوي الصفر. الطرف داخلٌ إذن، خلافاً لما توحي به المبرهنة وحدها.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0$$

كلّما انتهى مجالُ اشتقاقٍ عند طرفٍ ينتمي إلى مجموعة التعريف، فالمبرهنة لا تحسم، والحسم بحساب نهاية الكسر عند ذلك الطرف.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

جدول المشتقّات المرجعيّة

بعد ما سبق يصير الجدول أداةَ نظرٍ سريع لا مادّةَ حفظ. انتبه إلى العمود الأخير في الكتاب: هو ليس زينة، بل يحمل المجموعة التي تصلح عليها كلّ سطر.

مشتقّات توابع مرجعيّة

$(mx+p)'=m$ على $\mathbb{R}$. ميل المستقيم ثابت.

$(x^n)'=n\,x^{n-1}$ على $\mathbb{R}$ ، حيث $n\in\mathbb{N}^*$.

$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$ و $x\neq 0$. لاحظ الإشارة السالبة.

$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ على $]0,+\infty[$ وحدها. المجال مفتوح عند الصفر، وهذا هو السطر الذي يخفي المسألة.

$(\sin x)'=\cos x$ على $\mathbb{R}$.

$(\cos x)'=-\sin x$ على $\mathbb{R}$. الإشارة السالبة هنا لا في الجيب.

الكتاب، الصفحة 70

انتبه: السطر الرابع هو الفخّ. مجال اشتقاق $\sqrt{x}$ هو $]0,+\infty[$ بينما مجال تعريفه $[0,+\infty[$ ، والفرق نقطةٌ واحدة. عندها تنقلب الحال بحسب التابع الذي يضربه الجذر: الجذر وحده غير اشتقاقيٍّ عند الصفر، و $x\sqrt{x}$ اشتقاقيٌّ عنده كما رأينا.

المجموعة جزءٌ من الجواب

تُصاغ مسألة الكتاب على الصفحة 71 بثلاثة مطالب مرتّبة: عيّن مجموعة تعريف التابع، ثمّ المجموعة التي يقبل عليها الاشتقاق، ثمّ احسب تابعه المشتقّ. الترتيب مقصود، ومن قفز إلى الحساب فقد بندين قبل أن يبدأ.

خذ $h(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x}$. المقام ينعدم عند 0 وعند -1 ، فالتابع كسريٌّ معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ ، ومن ثَمّ اشتقاقيٌّ على المجموعة نفسها، لأنّ التوابع الكسريّة اشتقاقيّة على مجموعة تعريفها. وبالصيغة $\dfrac{u}{v}$ نحصل على المشتق.

$$h'(x)=\frac{(2x+1)(x^2+x)-(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=-\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

وخذ $g(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. هنا لا ينعدم المقام أبداً: مميّز x^2+x+1 سالب، فالتابع معرّف واشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ كلّها. ومن الصيغة $\dfrac{1}{v}$ يكون $g'(x)=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

تذكّر: لاحظ الفرق بين المثالين: كلاهما كسريّ، وكلاهما يُحلّ بالقاعدة نفسها، والذي اختلف هو المجموعة. دراسة المقام تسبق الاشتقاق دائماً.

ما مجموعة اشتقاق التابع $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4}$ ؟

> **كيف أبدأ؟** لا تحسب المشتقّ أصلاً، فالسؤال عن المجموعة لا عن الصيغة. في الدرس جملةٌ تختصر الطريق كلّه: التابع الكسريّ اشتقاقيٌّ على مجموعة تعريفه. فحدّد أوّلاً أيّ جزأي الكسر هو الذي يُقصي نقطةً، ثمّ حلّ معادلة انعدامه إلى آخر حلٍّ فيها.

أ) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

ب) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

ج) $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

أ. نعم. المقام ينعدم عند -2 و 2 ، وهذه مجموعة التعريف، والتابع الكسري اشتقاقيٌّ على مجموعة تعريفه.

تذكّر: في سلالم التصحيح التي قرأناها، تُمنح درجةٌ مستقلّة لتعيين المجموعة قبل أيّ حساب. اكتبها في سطرٍ وحدها، ولو بدت بديهيّة، فهي أرخص درجةٍ في المسألة.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 70 إلى 72 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.