الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

تطبيقات الاشتقاق

بسيطة

من إشارة المشتق إلى الاطراد، ومنه إلى القيم الحدّية وإلى عدد حلول معادلة

التوابع: الاشتقاق . الوحدة 3 . الدرس 3

حتى الآن كان المشتق عدداً يقيس ميلاً عند نقطة. في هذا الدرس يصير أداةَ حكمٍ على التابع كلّه: إشارةُ المشتق على مجالٍ تقول إن كان التابع صاعداً أو هابطاً عليه، وانعدامُه مع تغيّر إشارته يكشف قمّةً أو قاعاً، والاطرادُ التامّ مع تغيّر الإشارة بين طرفين يُثبت أنّ لمعادلةٍ حلّاً واحداً لا أكثر. ثلاث مبرهنات متتابعة، كلٌّ منها تبني على سابقتها، وآخرها هو الوحيد الجديد في هذه الوحدة. وهو أيضاً أكثرها حضوراً في البكالوريا.

إشارة المشتق تحكم على الاطراد

ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً على مجالٍ I ، وتابعه المشتقّ f' . الفكرة بسيطة: الميل الموجب يعني صعوداً، والميل السالب هبوطاً، والميل المعدوم سكوناً. والمبرهنة تجعل هذا الكلام دقيقاً.

مبرهنة 2

$f \nearrow \iff f' > 0$ إذا كان f' موجباً تماماً على I ، باستثناء عددٍ منته من النقاط قد ينعدم عندها، كان f متزايداً تماماً على I .

$f \searrow \iff f' < 0$ وبالمثل مع السالب: f متناقص تماماً على I .

$f' = 0 \iff f(x) = c$ إذا انعدم f' على I كلّه، كان f ثابتاً على I .

الكتاب، الصفحة 73

تذكّر: اصطلاحٌ من الكتاب: نكتب $g > 0$ على I دلالةً على أنّ $g(x) > 0$ أيّاً كانت x من I . عبارةٌ مختصرة عن كلّ نقاط المجال، لا عن نقطةٍ واحدة.

وللبندين الأوّلين صياغةٌ مكافئة يستعملها الكتاب في البراهين، وهي أسهل في التطبيق: إذا كان $f' \geq 0$ على I ولا ينعدم على أيّ مجالٍ جزئيٍّ من I ، كان f متزايداً تماماً على I . وبالمثل مع $f' \leq 0$ والتناقص.

انتبه: لاحظ الفرق بين «ينعدم عند عددٍ منتهٍ من النقاط» و«ينعدم على مجالٍ جزئي». الأولى مسموحة ولا تكسر الاطراد التامّ، والثانية تكسره: تابعٌ مشتقّه معدوم على مجالٍ كامل يكون ثابتاً هناك، فلا يعود متزايداً تماماً.

انتبه: وشرطُ أنّ I مجالٌ ضروريّ، وليس تفصيلاً. خذ التابع المعرّف بـ $f(x) = -1$ عندما $x < 0$ و $f(x) = 1$ عندما $x > 0$. هو اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}^*$ و $f'(x) = 0$ أيّاً كانت x من $\mathbb{R}^*$ ، ومع ذلك فإنّ f ليس ثابتاً. السبب أنّ $\mathbb{R}^*$ ليس مجالاً بل اجتماع مجالين، والمبرهنة لا تسري عليه.

التابع f اشتقاقيٌّ على $]0,5[$ و $f'(x) > 0$ عدا عند $x = 2$ حيث ينعدم. ماذا نستنتج؟

> **كيف أبدأ؟** عُد إلى المبرهنة 2 وإلى التنبيه الذي يليها: هناك حالتان لانعدام المشتقّ، انعدامٌ عند عددٍ منتهٍ من النقاط وانعدامٌ على مجالٍ جزئي، وحكم كلٍّ منهما مختلف. حدّد أيّ الحالتين أمامك هنا، ثمّ اقرأ ما تقوله المبرهنة عنها.

أ) أنّ f ثابتٌ عند 2

ب) أنّ الاطراد ينكسر عند 2

ج) أنّ f متزايدٌ تماماً على $]0,5[$

ج. نعم. نقطةٌ واحدة عددٌ منتهٍ، والمبرهنة تسمح بها ويبقى الاطراد تامّاً.

القيم الحدّية

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I ولتكن c نقطة من I . نقول إنّ القيمة $M = f(c)$ قيمةٌ كبرى محلياً للتابع f يبلغها عند c إذا وُجِدَ مجالٌ مفتوحٌ J يضمّ c ويحقّق الشرط الآتي.

تعريف 3

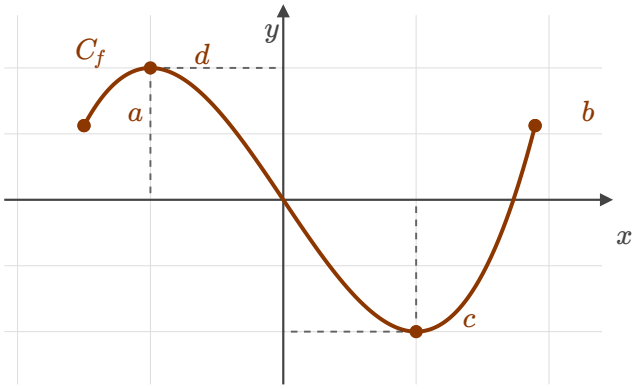
$f(x) \le f(c)$ $\forall x \in J \cap I,$ قيمة كبرى محلياً، يبلغها التابع عند c .

وبأسلوبٍ مماثل، قيمة صغرى محلياً عند d . $f(d) \le f(x)$ $\forall x \in J \cap I,$

الكتاب، الصفحة 73

تذكّر: ونقول إنّ $f(a)$ قيمةٌ حدّيّة محلّياً إذا كانت قيمة كبرى محلّياً أو صغرى محلّياً. وكلمة «محلّياً» هي المفتاح: المقارنة تجري داخل مجالٍ صغيرٍ حول النقطة، لا على المجال كلّه.

وقيمةٌ واحدة قد تكون الاثنتين معاً عند نقطتين مختلفتين. في مثال الكتاب على المجال $[a,b]$ تكون $A = f(a) = f(b)$ قيمةً كبرى محلّياً يبلغها التابع عند b ، وقيمةً صغرى محلّياً يبلغها عند a . الطرفان يتصرّفان تصرّفاً خاصّاً لأنّ المجال ينتهي عندهما.



على المجال $[a, b]$: القيمتان عند a و c صغريان محلّياً، والقيمتان عند d و b كبريان محلّياً. ولاحظ أنّ $f(a) = f(b)$ هي في آنٍ معاً قيمةٌ كبرى محلّياً يبلغها التابع عند b ، وقيمةٌ صغرى محلّياً يبلغها عند a .

مبرهنة 3

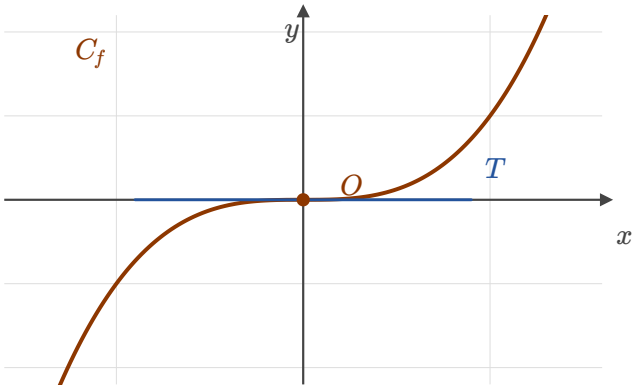
$f'(c) = 0$ بشرط أن يكون I مجالاً مفتوحاً و c نقطةً منه. إذا كانت $f(c)$ قيمةً كبرى أو صغرى محلّياً، انعدم المشتق عندها. هذا الاتّجاه لازمٌ دائماً.

$f'(c^-) \times f'(c^+) < 0$ الاتّجاه الآخر يحتاج شرطاً إضافيّاً: أن يغيّر f' إشارته عند c ، أي أن تكون الإشارتان على الجانبين مختلفتين. عندئذٍ تكون $f(c)$ قيمةً حدّيّة.

الكتاب، الصفحة 74

تذكّر: وفي شروط المبرهنة، إذا كانت $f(c)$ قيمةً حدّيّة، كان المماس للخطّ البياني في النقطة $(c, f(c))$ أفقيّاً. هذا هو الجسر إلى درس المماس: قيمةٌ حدّيّة ومماسٌ أفقيّ وجهان لأمرٍ واحد.

انتبه: 🚨 وانعدام المشتق وحده لا يكفي. التابع $f(x) = x^3$ يحقّق $f'(0) = 0$ ، ومع ذلك فإنّ $f(0)$ ليست قيمةً كبرى محلّياً ولا صغرى محلّياً، لأنّ f' لا يغيّر إشارته عند الصفر: $f'(x) = 3x^2$ موجبٌ على الجانبين. تغيّر الإشارة هو الشرط، لا الانعدام.



$f(x) = x^3$: المماس عند 0 أفقيّ لأنّ $f'(0) = 0$ ، ومع ذلك يعبر الخطّ البياني من الهبوط الظاهري إلى الصعود من دون قمّةٍ ولا قاع.

التابع g اشتقاقيٌّ على مجالٍ مفتوح و $g'(3) = 0$. هل $g(3)$ قيمةٌ حدّيّة؟

كيف أبدأ؟ مبرهنة 3 سطران، والسطر الثاني يضيف شرطاً لا يطلبه السطر الأوّل. حدّد أيّ السطرين يصف حالتك هنا، وانظر في التنبيه الذي يلي المبرهنة قبل أن تحكم.

أ) ليس بالضرورة، ويلزم فحص تغيّر الإشارة
ب) نعم، دائماً
ج) لا، أبداً

أ. نعم. الانعدام شرطٌ لازم لا كافٍ، ومثال x^3 عند الصفر يُظهر ذلك.

حلّ المعادلات، وهو الجديد

المبرهنة الثالثة هي الوحيدة الجديدة في هذه الوحدة، وهي أكثرها ظهوراً في البكالوريا. تربط الاطراد التامّ بعدد حلول معادلة.

مبرهنة 4

$f' \geq 0$ ولا ينعدم f' على أيّ مجالٍ جزئيٍّ من I ، فيكون f مستمرّاً ومتزايداً تماماً.

$k \in [f(a), f(b)]$ أيّاً كان k من المجال بين قيمتَي الطرفين.

$\exists!\, x \in [a, b] : f(x) = k$ حلٌّ وحيد. الوجود من الاستمرار، والوحدانيّة من الاطراد التامّ.

الكتاب، الصفحة 74

والصياغة المقابلة بالتناقص: إذا كان $f' \leq 0$ على I ولا ينعدم على أيّ مجالٍ جزئي، فأيّاً كان k من $[f(b), f(a)]$ كان للمعادلة $f(x) = k$ حلٌّ وحيد في $[a, b]$. ويكفي أن نفترض f مستمرّاً على المجال المغلق $[a, b]$ واشتقاقيّاً على المفتوح $]a, b[$ ، ومشتقّه لا يغيّر إشارته.

وأكثر ما يُطلب في الامتحان هو الحالة $k = 0$ ، أي تحديد مواقع حلول معادلة $f(x) = 0$. لإثبات أنّها تقبل حلّاً وحيداً α في مجالٍ I ، محدودٍ أو غير محدود، مغلقٍ أو مفتوح، يكفي إثبات أمرين.

طريقة الحلّ الوحيد

$f \nearrow$ اطرادٌ تامّ على I ، صعوداً أو هبوطاً، يُقرأ من إشارة المشتق بالمبرهنة 2.

$f(a) \times f(b) < 0$ أي أنّ $f(a)$ و $f(b)$ من إشارتين مختلفتين، فيكون الصفر محصوراً تماماً بينهما.

$\exists! \alpha \in]a, b[\,:\, f(\alpha) = 0$ الوجود من المبرهنة 4، والوحدانيّة من الاطراد التامّ.

الكتاب، الصفحة 75

تذكّر: الشرط $f(a) \times f(b) < 0$ هو الصيغة العمليّة لعبارة «من إشارتين مختلفتين». اضرب القيمتين وانظر إلى إشارة الجداء، فهذا أسرع من مقارنة الإشارتين واحدةً واحدة، وهو ما يكتبه المصحّح في السلّم.

تابعٌ متزايدٌ تماماً على $[1, 4]$ مع $f(1) = -2$ و $f(4) = 5$. كم حلّاً للمعادلة $f(x) = 0$ في هذا المجال؟

> **كيف أبدأ؟** الشرطان في «طريقة الحلّ الوحيد» لا شرطٌ واحد. الأوّل مكتوبٌ في نصّ السؤال حرفياً، والثاني يُفحص بعمليّةٍ واحدة: احسب جداء $f(1)$ في $f(4)$ وانظر إلى إشارته، ثمّ احكم.

أ) لا يمكن الجزم
ب) حلٌّ وحيد
ج) حلّان

ب. نعم. $f(1) \times f(4) = -10 < 0$ ، والتابع متزايدٌ تماماً، فالحلّ موجودٌ ووحيد.

دراسة كاملة: التابع ظلّ

يختم الكتاب الدرس بدراسةٍ كاملة لتابعٍ واحد، ونتبعه: $f : x \mapsto \tan x$. فيها تجتمع كلّ أدوات الوحدة، وهي النموذج الذي يتكرّر في المسألة الكبرى للبكالوريا.

مجموعة التعريف: تذكّر أنّ $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ، فهو غير معرّف عندما $\cos x = 0$ ، أي في حالة $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

مجموعة الدراسة: أيّاً كانت x من $\mathcal{D}_f$ كانت $-x$ من $\mathcal{D}_f$ ، وكان $f(-x) = -f(x)$ ، فالتابع فردي وخطّه البياني متناظر بالنسبة إلى المبدأ O . وهو دوريّ ودورُه π ، فتكفي دراسته على مجالٍ طوله π ، ولأنّه فردي نكتفي بالمجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

عند طرف مجال الدراسة: التابع مستمرّ عند 0 و $f(0) = 0$. وعندما تقترب x من $\frac{\pi}{2}$ بقيمٍ أصغر منها، يسعى $\cos x$ إلى الصفر بقيمٍ موجبة، فتكبر النسبة بلا حدّ.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2},\, x < \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$$

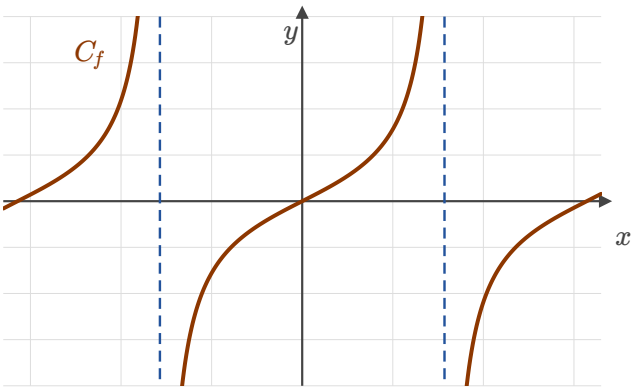
تذكّر: فالمستقيم الذي معادلته $x = \frac{\pi}{2}$ مستقيمٌ مقاربٌ شاقوليّ للخطّ البياني. ولاحظ أنّه مقاربٌ لا مماس: الخطّ يقترب منه بلا حدّ ولا يلمسه أبداً.

الاطراد: التابع f اشتقاقيٌّ على $\mathcal{D}_f$ ، ومشتقّه موجبٌ تماماً هناك، فهو متزايدٌ تماماً على كلّ مجالٍ من مجالات تعريفه، وعلى الخصوص على $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

وبهذا يكتمل جدول التغيّرات البسيط على مجال الدراسة.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$



الخطّ البياني للتابع $\tan$: فرعٌ صاعدٌ بين كلّ مقاربين شاقوليّين، والشكل يتكرّر كلّ π .

انتبه: لا تقل إنّ $\tan$ متزايدٌ تماماً على $\mathcal{D}_f$. مجموعة التعريف اجتماعُ مجالات لا مجالٌ واحد، والاطراد يُقال على كلّ مجالٍ منها على حدة. هذا هو الشرط نفسه الذي رأيناه في المبرهنة 2، وهنا يظهر في أوضح صورة: الفرع التالي يبدأ من $-\infty$ من جديد.

مثال محلول: جدول تغيّرات وجذرٌ وحيد

هذا السؤال 5 من «تَدرَّبْ» على الصفحة 77 ، وهي الشكل الذي تأتي به المسألة في البكالوريا: جدولٌ أوّلاً، ثمّ حصرُ جذرٍ بدقّةٍ مطلوبة. ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = x^3 - 3x + 5$$

1. المشتق وإشارته التابع كثير حدود، فهو اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$. والمشتق ثلاثيّ حدودٍ من الدرجة الثانية، ننشره إلى جداء عاملين لنقرأ إشارته.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3\,(x-1)\,(x+1)$$

2. القيم عند نقاط الانعدام ينعدم المشتق عند -1 و 1 ، ويغيّر إشارته عندهما، فالقيمتان حدّيّتان بالمبرهنة 3. نحسبهما قبل بناء الجدول.

$$f(-1) = 7 \quad , \quad f(1) = 3$$

3. الجدول المشتق موجبٌ خارج $[-1,1]$ وسالبٌ داخله، فالتابع يصعد ثمّ يهبط ثمّ يصعد. ونهاياته عند الطرفين هما $-\infty$ و $+\infty$ لأنّ الحدّ المسيطر هو x^3 .

4. الجذر بين -3 و -2 على $]-\infty,-1]$ التابع متزايدٌ تماماً. نحسب القيمتين عند الطرفين ونضربهما: الجداء سالب، فالصفر محصورٌ بينهما، وبالمبرهنة 4 يوجد جذرٌ وحيد هناك.

$$f(-3) = -13 \quad , \quad f(-2) = 3 \quad , \quad f(-3)\times f(-2) < 0$$

5. الحصر بدقّة 10^{-1} نقسّم المجال ونحسب حتى تنقلب الإشارة على طولٍ لا يزيد على العُشر. عند -2.3 القيمة سالبة وعند -2.2 موجبة، فالجذر بينهما.

$$f(-2.3) = -0.267 \quad , \quad f(-2.2) = 0.952 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in [-2.3, -2.2]$$

الخطوات الأربع نفسها في كلّ دورة: اشتقّ، اقرأ الإشارة، ابنِ الجدول، ثمّ اضرب قيمتَي الطرفين وانظر إلى إشارة الجداء.

$$f(a)\times f(b) < 0$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	7	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

تذكّر: في سلالم التصحيح التي قرأناها يُبَنَّد الجدول خليّةً خليّة: درجتان لكلّ إشارةٍ وثلاث لكلّ سهم في دورة 2026 ، ومع ذلك تُخصم ثلاث درجات إذا لم توافق الإشارةُ الأسهم. اجعل السهم يتبع الإشارة دائماً، ولا تملأ الجدول من الشكل.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 73 إلى 77 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.