الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

العدد المشتق والتابع المشتق

نهاية واحدة تقيس ميل الخطّ البياني عند نقطة، ومنها يولد المماس

التوابع: الاشتقاق . الوحدة 3 . الدرس 1

بسيطة

في وحدة النهايات سألنا: إلى أين تتّجه قيم التابع؟ وهنا نسأل سؤالاً آخر تماماً: بأيّ سرعة تتغيّر؟ خذ نقطتين على الخطّ البياني واحسب ميل المستقيم الواصل بينهما، ثمّ قرّب الثانية من الأولى شيئاً فشيئاً. إن استقرّ هذا الميل على عدد، فذاك العدد هو ميل الخطّ البياني نفسه عند تلك النقطة، ونسمّيه العدد المشتق. هو نهاية، فكلّ ما تعلّمته في الوحدة السابقة يعمل هنا من دون تغيير. وثمرته مباشرة: مستقيم يمرّ بالنقطة وميله هذا العدد، وهو المماس، ومنه يأتي تقريبٌ يختصر حساباتٍ ثقيلة إلى ضربٍ وجمع.

من ميل قاطعٍ إلى ميل عند نقطة

في كلّ هذه الوحدة نرمز بالرمز D_f إلى مجموعة تعريف تابع f ، وبالرمز C_f إلى الخطّ البياني للتابع f في معلمٍ متجانس. هذا اصطلاح الكتاب نفسه، ونحن نلتزم به.

لتكن a نقطة من مجالٍ I ، ولتكن x نقطة أخرى منه. المستقيم الواصل بين $(a, f(a))$ و $(x, f(x))$ يسمّى قاطعاً، وميله هو الفرق بين الارتفاعين مقسوماً على الفرق بين الفاصلتين.

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

هذا الكسر يقيس متوسّط التغيّر بين النقطتين، لا التغيّر عند a وحدها. فإذا أردنا الميل عند a بالذات، قرّبنا x من a وسألنا سؤال النهايات: هل يستقرّ هذا الكسر على عدد؟ إن استقرّ، فذاك العدد هو المطلوب.

تذكّر: لاحظ أنّ الكسر غير معرّف عند $x = a$ ، إذ يصير المقام صفراً. ولهذا بالضبط نحتاج إلى النهاية: هي الأداة الوحيدة التي تتكلّم عن سلوكٍ قرب نقطة من دون أن تحتاج إلى قيمة عندها.

العدد المشتق، بصيغتين متكافئتين

ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I محتوى في D_f ، ولتكن a نقطة من I . نقول إنّ العدد ℓ هو العدد المشتق للتابع f عند a إذا وفقط إذا تحقّق واحدٌ من الشرطين الآتيين، وهما شرطٌ واحد في لباسين.

تعريف 1

$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\ell$ بشرط أن يبقى $a+h$ في I . هنا نتحرّك بمقدارٍ صغير h عن a .

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\ell$ بشرط أن تبقى x في $I\setminus\{a\}$. هنا نقرّب نقطةً ثانية من a .

$f'(a)=\ell$ الرمز المتّفق عليه للعدد المشتق للتابع f في a .

الكتاب، الصفحة 67

الصيغتان واحدة، والانتقال بينهما تعويضٌ لا أكثر: ضع $x=a+h$ ، فيصير $x-a$ هو h ، ويصير سعي x إلى a هو سعي h إلى الصفر. استعمل أيّهما أسهل في المسألة التي بين يديك.

وللكلام مصطلحان يجب التمييز بينهما. عندما يقبل f عدداً مشتقّاً في a ، نقول إنّ f اشتقاقيٌّ في a . وعندما يكون f اشتقاقياً عند كلّ نقطة من مجالٍ I ، نقول إنّ f اشتقاقيٌّ على I .

انتبه: الفرق بين عبارة «اشتقاقيٌّ في a » وعبارة «اشتقاقيٌّ على I » ليس تفصيلاً لغوياً. الأولى تتكلّم عن نقطة واحدة، والثانية عن كلّ نقاط المجال. تابعٌ قد يكون اشتقاقياً في كلّ نقطة من I عدا واحدة، فلا يصحّ عندئذٍ أن نقول إنّه اشتقاقيٌّ على I ، ويبقى اشتقاقياً على كلّ مجال جزئي لا يحوي تلك النقطة.

التابع f معرّف على $\mathbb{R}$ ، وأردنا العدد المشتق عند $a=2$. أيّ الكسور الآتية هو الذي تُحسب نهايته؟

> **كيف أبدأ؟** عُد إلى كسر ميل القاطع في أوّل الدرس، وقل بالكلام لا بالرموز ما الذي يمثّله بسطه وما الذي يمثّله مقامه، والنقطة هنا $a=2$. ثمّ اعرض الأجوبة الثلاثة على هذين الوصفين، وانتبه إلى ترتيب الطرح في كلٍّ منهما.

أ) $\dfrac{f(x)-f(2)}{x}$

ب) $\dfrac{f(2)-f(x)}{x-2}$

ج) $\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

ج. نعم. فرق الارتفاعين على فرق الفاصلتين، بالترتيب نفسه في البسط والمقام. ونهايته عندما تسعى x إلى 2 هي $f'(2)$.

التابع المشتق ومجموعة تعريفه

إذا كان f اشتقاقياً على مجالٍ I ، فعند كلّ نقطة من I عددٌ مشتق. وهذا يعني أنّنا أمام تابعٍ جديد: يأخذ نقطةً ويعطي العدد المشتق عندها.

تعريف 2

$f' : a \mapsto f'(a)$ التابع المشتق للتابع f على I . مدخله نقطة، ومخرجه ميل الخطّ البياني عندها.

الكتاب، الصفحة 67

ومجموعة تعريف f' ليست بالضرورة مجالاً واحداً؛ يمكن أن تكون اجتماع مجالات. خذ التابع المعرّف وفق $f(x) = \dfrac{1}{x}$ على $D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ ، فتابعه المشتق معرّف على D نفسها وفق $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

انتبه: لا تخلط بين D_f و مجموعة تعريف f' . الثانية محتواة في الأولى وقد تكون أصغر منها: قد يكون التابع معرّفاً عند نقطة وغير اشتقاقيٍّ عندها. اكتب دائماً المجموعة التي تشتقّ عليها، فهي جزءٌ من الجواب لا زينةً فيه.

التابع g معرّف على $\mathbb{R}$ واشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ عدا النقطة 0 . ما مجموعة تعريف g' ؟

كيف أبدأ؟ في المعطى خاصّتان عن g : واحدة عن التعريف وأخرى عن الاشتقاق. راجع التنبيه الذي يميّز بين D_g ومجموعة تعريف g' ، ثمّ قرّر أيّ الخاصّتين هي التي تُبنى منها المجموعة المطلوبة.

أ) $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$
ب) $\mathbb{R}$
ج) $[0, +\infty[$

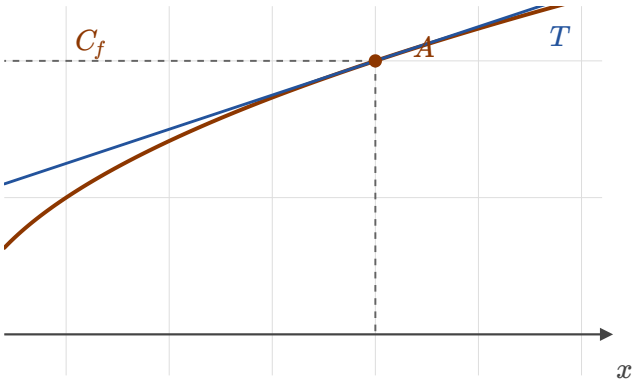
أ. نعم، اجتماع مجالين. النقطة 0 خارجة لأنّ التابع غير اشتقاقيٍّ عندها، وإن كان معرّفاً فيها.

المماس، وما يعنيه ميله

ليكن C الخطّ البياني لتابع f اشتقاقيٍّ عند النقطة a ، وليكن T المماس للمنحني C في النقطة $A\,(a, f(a))$. إنّ T هو المستقيم المارّ بالنقطة A وميلُه يساوي $f'(a)$.

$$T : y = f'(a)\,(x - a) + f(a)$$

اقرأ المعادلة كما تُبنى: انطلق من الارتفاع $f(a)$ عند الفاصلة a ، ثمّ تحرّك بميلٍ مقداره $f'(a)$. النقطة والميل، لا أكثر، وهما بالضبط ما يحدّد مستقيماً واحداً.



المماس T يمسّ C_f في النقطة A ولا يقطعه في جوارها، وميله هو $f'(4)$.

تذكّر: إشارة $f'(a)$ تُقرأ من الشكل مباشرة: ميلٌ موجب يعني مماساً صاعداً، وميلٌ سالب مماساً هابطاً، و $f'(a) = 0$ يعني مماساً أفقياً معادلته $y = f(a)$. هذه القراءة هي الجسر إلى درس تطبيقات الاشتقاق.

تابعٌ اشتقاقيٌّ يحقّق $f(3) = 5$ و $f'(3) = -2$. ما معادلة المماس عند $a = 3$ ؟

كيف أبدأ؟ المماس مستقيمٌ يمرّ بالنقطة $(3, f(3))$ ، وهذا وحده اختبارٌ تعرضه على كلّ جواب: عوّض $x = 3$ وانظر أيّ ارتفاعٍ تحصل عليه. ثمّ ميّز الدورين قبل أن تختار: ما الذي يعطيه $f'(3)$ وما الذي يعطيه $f(3)$ ؟

أ) $y = -2x + 5$

ب) $y = -2(x - 3) + 5$

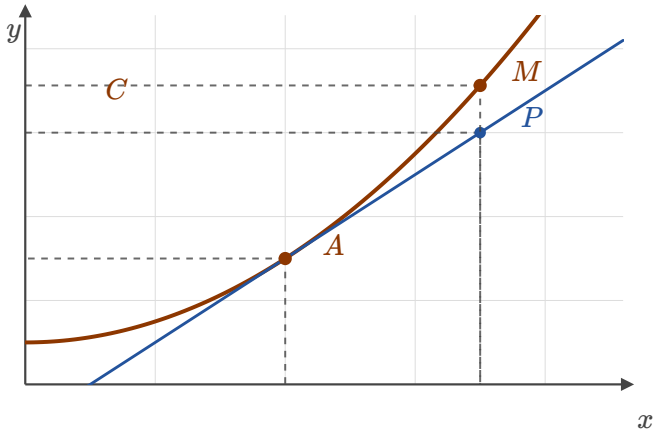
ج) $y = 5(x - 3) - 2$

ب. نعم. عوّض $x = 3$ فتجد $y = 5$ ، فالمستقيم يمرّ بالنقطة، وميله -2 كما يجب.

التقريب التآلفي المحلي

يظهر من الرسم أنّ المستقيم T قريب من المنحني C في جوار النقطة A . وفيما يأتي تكون h قريبةً من الصفر. ويمكننا إذن أن نستبدل بالمنحني المستقيمَ بقرب A ، أي أن نستبدل بالتابع $x \mapsto f(x)$ التابعَ التآلفي $x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a)$.

$$f(a + h) \approx f(a) + h\, f'(a)$$



عند الفاصلة $a+h$ تقع M على المنحني و P على المماس. المسافة الشاقوليّة بينهما هي الخطأ $h\varepsilon(h)$ ، وهي تصغر أسرع من h نفسها كلّما اقتربت h من الصفر.

وفائدته حسابيّة بحتة: المقدار $f(a)+h\times f'(a)$ كثير حدود من الدرجة الأولى بالمتحوّل h ، فحسابه يتطلّب عمليّة ضربٍ وعمليّة جمع فقط، مهما كان f معقّداً.

خذ $f:x\mapsto \sin x$ ، وهو اشتقاقي على $\mathbb{R}$ ، مع $f(0)=\sin 0=0$ و $f'(0)=\cos 0=1$. يعطي التقريب $\sin(h)\approx h$ ، فيكون $\sin(0.1)\approx 0.1$. والآلة الحاسبة تعطي 0.099833 ، فالفرق في الخانة الرابعة بعد الفاصلة.

ولهذا التقريب صياغة دقيقة تجعله مساواة لا تقريباً. عندما يكون f اشتقاقياً عند a يمكن أن نكتب ما يأتي، حيث ε تابعٌ للمتحوّل h .

الصياغة بـ ε

$f(a+h)=f(a)+h\,f'(a)+h\,\varepsilon(h)$ مساواة تامّة، لا تقريب. الحدّ الأخير هو الخطأ، وهو مضروبٌ بـ h .

$\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ يكفي أن نضع $\varepsilon(h)=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}-f'(a)$ ثمّ نستفيد من تعريف العدد المشتق.

$f(a+h)=f(a)+h\ell+h\varepsilon(h)\Longrightarrow \ell=f'(a)$ وبالعكس: إذا أمكنت هذه الكتابة بعددٍ حقيقيٍّ ℓ مع $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ ، كان ℓ هو العدد المشتق عند a .

الكتاب، الصفحة 68

انتبه: كلمة «محلي» في اسم التقريب ليست زينة. التقريب صالح في جوار a وحدها، ويسوء كلّما ابتعدت. لو استعملت $\sin(h)\approx h$ عند $h=1.5$ لأعطاك 1.5 ، والقيمة الحقيقيّة أصغر من الواحد، فالخطأ يزيد على النصف.

مثال محلول: صفة للقطع المكافئ

هذا مثال الكتاب على الصفحة 69 . فائدته أنّه لا يطلب حساب عددٍ مشتق فحسب، بل يستعمل الميل أداةَ برهانٍ هندسي، وهذا ما تفعله مسائل البكالوريا. ليكن $\mathcal{P}$ الخطّ البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$ ، ولتكن A و B نقطتين من $\mathcal{P}$ فاصلتاهما بالترتيب u و v حيث $u \neq v$ ، ولتكن D النقطة من $\mathcal{P}$ التي فاصلتها $\dfrac{u+v}{2}$. أثبت أنّ المماس T المارّ بالنقطة D يوازي المستقيم (AB) .

$$f(x) = x^2$$

1. ما الذي يكفي إثباته المستقيمان لا يوازيان محور التراتيب، فيكفي إثبات تساوي ميليهما. هذه ملاحظة الكتاب نفسه، وهي التي تحوّل مسألة هندسيّة إلى حسابِ عددين.

2. ميل المستقيم (AB) النقطتان هما $\left(u, u^2\right)$ و $\left(v, v^2\right)$. طبّق قانون الميل واختصر فرق المربّعين.

$$m_1 = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{v^2 - u^2}{v - u} = v + u$$

3. ميل المماس T التابع المشتق هو $f'(x) = 2x$. وميل المماس عند نقطةٍ هو العدد المشتق عند فاصلتها، وفاصلة D هي $\dfrac{u+v}{2}$.

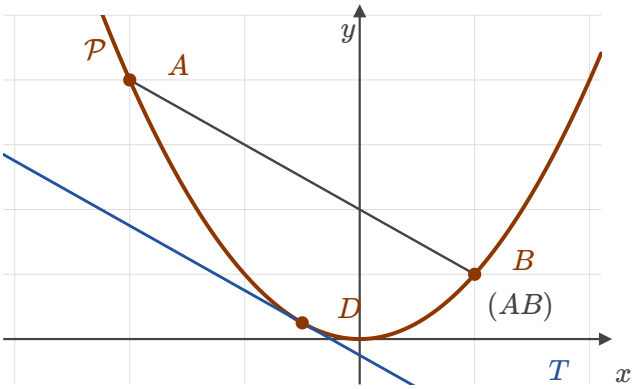
$$m_2 = f'\left(\frac{u+v}{2}\right) = 2 \times \frac{u+v}{2} = u + v$$

4. الخلاصة الميلان متساويان، فالمستقيمان (AB) و T متوازيان، وهي النتيجة المطلوبة. ولاحظ أنّ النتيجة لا تتعلّق باختيار u و v ، فهي صفةٌ من صفات القطع المكافئ كلّه.

$$m_1 = m_2 = u + v$$

كلّما طُلب توازٍ أو تعامد بين مماسٍ ومستقيم، فالطريق هو الميل: ميل المماس T عند نقطةٍ فاصلتها a ، ونرمز إليه بـ m_T ، هو العدد المشتق عند تلك الفاصلة، لا شيء آخر.

$$m_T = f'(a)$$



المماس T عند النقطة D التي فاصلتها $\dfrac{u+v}{2}$ يوازي الوتر (AB) ، لأنّ ميلَيهما متساويان ويساويان $u+v$. هنا $u=-2$ و $v=1$ ، فالميلان -1 .

تذكّر: معادلة المماس بندٌ ثابت في البكالوريا، ووزنها في الدورات التي قرأناها 15 درجة موزّعة على ثلاث خطوات متساوية: حساب $f(a)$ ، وحساب $f'(a)$ ، وكتابة المعادلة. من أتقن هذه الثلاث ضمن الدرجات كاملة قبل أن تبدأ المسألة الحقيقيّة.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 67 إلى 69 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.