



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

المتحولات العشوائية الحداثيّة

حين تتكرّر التجربة نفسها، ولا يهمّ إلا عدد مرّات النجاح

الاحتمالات . الوحدة 7 . الدرس 4

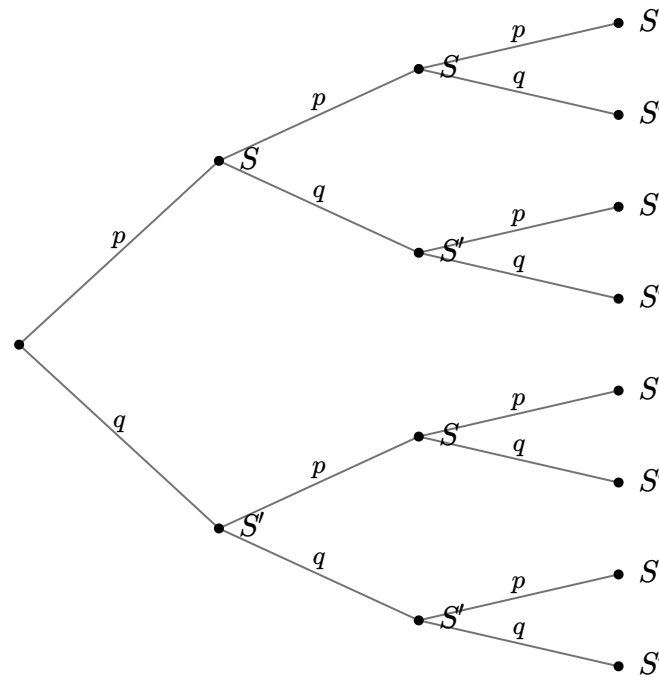
هذا آخر دروس الكتاب، وهو يجمع خيطين سبقاه. من الوحدة السادسة يأتي $\binom{n}{k}$ ، عدد الطرق لاختيار k من n ، ومن هذه الوحدة تأتي الشجرة وضرب الاحتمالات على المسار. والسؤال الذي يوحدهما بسيط: نكرّر التجربة نفسها n مرّة، ولا يهمّنا في كلّ مرّة إلا وقوع حدثٍ واحدٍ أو عدم وقوعه، فما احتمال أن يقع k مرّة بالضبط؟ والجواب صيغةٌ واحدة تحلّ عائلةً كاملةً من المسائل، وستراها تُبنى من الصفر لا تُعطى.

الاختبار البرنوليّ والتجربة البرنوليّة

ولاحظ كيف يعرّف الكتاب الاختبار البرنوليّ، فالتعريف غير متوقّع: لا يشترط أن تكون للتجربة نتيجتان اثنتان، بل أن نهتمّ نحن بوقوع حدثٍ واحدٍ فقط. والكتاب يضع كلمة «فقط» بالأزرق وتحتها خط. مثاله: نلقي حجر نردٍ ونهتمّ فقط بوقوع الحدث S «ظهور العدد 6». للرد ستّ نتائج، لكننا نختار فضاء العيّنة $\Omega = \{S, S'\}$ ، وكلمة «نختار» هي المفتاح: الفضاء هنا مصنوعٌ بقرارنا لا موجودٌ في التجربة.

تذكّر: ورمزان يرافقان كلّ ما يأتي: $p = \mathbb{P}(S)$ احتمال الحدث المستهدف، و $q = \mathbb{P}(S')$ احتمال متّقه، ومن ثمّ $q = 1 - p$. فالوسيطان اثنان لا ثلاثة: n و p و q ليس معطى ثالثاً بل اختصارٌ لـ $1 - p$ ، ولذلك لا يظهر في اسم القانون $\mathcal{B}(n, p)$.

ثمّ الخطوة الثانية: نكرّر الاختبار نفسه n مرّة، بالشروط نفسها، وبحيث لا تتأثّر نتيجة اختبارٍ بما سبقه. هذه المجموعة تُسمّى تجربةً برنوليّة. والشرطان في الجملة ليسا زينة: «بالشروط نفسها» يعني أنّ p لا يتغيّر من اختبارٍ إلى آخر، و«لا تتأثّر» يعني الاستقلال الاحتماليّ من الدرس الأوّل، حيث عرّفه الكتاب للأحداث وللتجارب البسيطة، لا الاستقلال بين متحوّلين عشوائيين من الدرس الثالث. بل إنّ عبارة «لا تتأثّر» نفسها مأخوذة من صفحة 160 في الدرس الأوّل. وعليهما يقوم كلّ ما بعدهما.



شجرة ثلاث رميات، كما في الكتاب صفحة 169. ثلاث مراحل وثمانية أطراف، وعلى كل فرع علوي p وعلى كل فرع سفلي q . والكتاب يضع فوق الشجرة خمسة عناوين: الإلقاء الأول، الإلقاء الثاني، الإلقاء الثالث، نتيجة التجربة، الاحتمال. والعمودان الأخيران في الجدول الذي يليها.

SSS	SSS'	$SS'S$	$SS'S'$
p^3	p^2q	p^2q	pq^2
$S'SS$	$S'SS'$	$S'S'S$	$S'S'S'$
p^2q	pq^2	pq^2	q^3

الأطراف الثمانية باحتمالاتها، كما يكتبها الكتاب في عمودي نتيجة التجربة والاحتمال، مقسومة هنا إلى كتلتين من أربع: تحت كل كلمة احتمالها. وهنا الملاحظة التي يقوم عليها الدرس كله: الاحتمال لا يتعلق بمواضع حرف S في الكلمة بل بعددها وحده. ثلاث كلمات فيها حرفان S ، ولها الاحتمال نفسه. ولهذا يكفي أن نعدّ الكلمات بدل أن نتتبع المسارات.

في شجرة الرميات الثلاث، ما احتمال المسار $S'SS'$ ؟

كيف أبدأ؟ اضرب على طول المسار كما في الدرس الأول. وُعِدَّ الحروف: كم مرّة S وكم مرّة S' ؟

(أ) p^2q

(ب) pq^2

(ج) $p + q + q$

ب. نعم. حرف S واحد ف p أسّه واحد، وحرفا S' ف q أسّه اثنان. ولاحظ في الجدول أنّ $SS'S'$ و $S'SS'$ و $S'S'S$ لها الاحتمال نفسه، لأنّ العدد هو ما يهمّ لا الموضع.

من أين يأتي المعامل

والآن الخطوة التي يقطعها الكتاب في أربعة أسطر، وهي كلّ ما في الدرس من فكر. لنسمّ X المتحوّل العشوائيّ الذي يقرن بكلّ نتيجة عدد حروف S فيها. فما $\mathbb{P}(X = 2)$ ؟

المطلوب احتمال الحصول على S مرّتين بالضبط في ثلاث رميات. والجواب في الجدول أعلاه، لكن المهمّ ليس الجواب بل لماذا هو كذلك.

$$\mathbb{P}(X = 2) = ?$$

1. ① اكتب الحدث مجموعةً من الكلمات أيّ الكلمات فيها حرفان S ؟ ثلاث: SSS' و $SS'S$ و $S'SS$. وهي أحداث متنافية، فلا تقع كلمتان معاً.

$$(X = 2) = \{SSS', SS'S, S'SS\}$$

2. ② لكلّ واحدةٍ الاحتمال نفسه كلّ منها فيها حرفان S وحرف S' ، فاحتمالها p^2q مهما كان ترتيب الحروف. وهذه هي ملاحظة الجدول.

$$\mathbb{P}(X = 2) = p^2q + p^2q + p^2q = 3p^2q$$

3. ③ ومن أين الثلاثة؟ هنا الخطوة الحاسمة لا تعدّها بالعين، بل اسأل: الكلمة ثلاثة مواضع مرقّمة، وأنت تختار منها موضعين للحرف S ، والباقي يأخذ S' تلقائياً. فعدد الكلمات هو عدد الطرق لاختيار موضعين من ثلاثة، وهذا هو التوفيق من الوحدة السادسة.

$$\binom{3}{2} = 3$$

4. ④ فالجواب معاملٌ يعدّ الكلمات، مضروباً باحتمال الكلمة الواحدة. وهذان العاملان هما كلّ الصيغة التي تأتي بعد قليل.

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} p^2 q = 3p^2 q$$

واحفظ التقسيم لا الصيغة: عاملٌ يقول كم كلمةً تحقّق الشرط، وعاملٌ يقول ما احتمال الكلمة الواحدة. الأوّل توفيقٌ من الوحدة السادسة، والثاني جداءٌ على مسارٍ من هذه الوحدة. والدرس كلّهُ هو تركيب هذين.

$$\binom{n}{k} \times p^k q^{n-k}$$

SSS'	$SS'S$	$S'SS$
$\{1, 2\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 3\}$

الجسر الذي لا يرسمه الكتاب: تحت كلّ كلمةٍ مجموعة مواضع حرف S فيها. الكلمات الثلاث توافق مجموعات المواضع الثلاث واحداً بواحد، فعّد الكلمات هو بعينه عدّ المجموعات الجزئية ذات العنصرين من مجموعة ذات ثلاثة عناصر. والكتاب يقطع هذه المسافة في أربعة أسطر بلا صورة، وهي أهمّ مسافةٍ في الدرس.

والحالة العامة هي الخطوات نفسها بالحروف. كلمة من n حرفاً على $\{S, S'\}$ ، فيها k حرفاً S و $n - k$ حرفاً S' ، احتمالها $p^k q^{n-k}$. وعدد هذه الكلمات هو عدد طرق اختيار k موضعاً من n ، أي $\binom{n}{k}$. والحدث $(X = k)$ هو اجتماعها كلها، وهي متنافية، فالاحتمال جداء العددين.

تعريف 8

نقول إن المتحول العشوائي X يتبع قانوناً حداثياً بوسيطين n و p عندما يتحقق شرطان: أن يأخذ X قيمه في المجموعة $\{0, 1, \dots, n\}$ ، وأن تتحقق هذه الصيغة أياً كان العدد الطبيعي k حيث $0 \leq k \leq n$ ، هكذا بالمتراجحة في الطبع، والطرفان داخلان. ونرمز عادةً إلى هذا القانون بالرمز $B(n, p)$.

الكتاب، الصفحة 171

انتبه: وخطآن يلزمان هذه الصيغة. الأول: إسقاط المعامل وكتابة $p^k q^{n-k}$ وحدها. تلك احتمال كلمة واحدة، والحدث يضم $\binom{n}{k}$ كلمة. والثاني: قلب الأسين، أي $\binom{n}{k} p^{n-k} q^k$. والقاعدة التي تمنعه: k عدد النجاحات، والنجاح احتمال p ، فأش p هو دائماً العدد الأسفل في المعامل. والتحقق في سطر: ضع $k = n$ ، فيجب أن يخرج p^n وحده، أي أن تنجح كل المرات.

مبرهنة 3

$B(n, p)$ في تجربة برنوليّة مؤلفة من تكرار عدد n من الاختبارات البرنوليّة المستقلة احتماليّاً والمتماثلة، يتبع المتحول العشوائي الذي يحصي عدد المرات التي يقع فيها حدث مُستهدف S احتمال وقوعه p قانوناً حداثياً وسيطاه n و p . والكتاب يعدّها مبرهنة مبرهنة سلفاً: «ثبت لنا المناقشة التي سبقت التعريف السابق صحّة المبرهنة الآتية»، أي إن ما فعلناه قبل قليل هو البرهان.

الكتاب، الصفحة 171

في ست رمياتٍ لحجر نردٍ متوازن، ما احتمال ظهور العدد 6 ثلاث مرّاتٍ بالضبط؟

كيف أبدأ؟ عيّن n و k و p أولاً واكتبها جانباً، ثمّ عوّض. ولا تنس أن $q = 1 - p$.

$$(أ) \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$(ب) \binom{6}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$(ج) \binom{6}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^6$$

ب. نعم. $n = 6$ و $k = 3$ و $p = \frac{1}{6}$ ، والناتج $\frac{625}{11664} = 20 \times \frac{125}{46656}$ ، أي نحو 0.054. ولاحظ أن مجموع الأسين $3 + 3 = 6 = n$ ، وهو تحقق سريع.

مبرهنة 4

متحولاً عشوائياً يتبع قانوناً حداثياً وسيطيه n و p ، عندئذٍ يُعطى $\mathbb{E}(X) = np$ ، $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$ ، وتباينه بهاتين الصيغتين. ولأحظ بساطتهما: لا مجموع ولا معامل، عملياً ضرب لا غير. وهذا ربح القانون الحداثي: لا تحتاج إلى جدول القانون لحساب التوقع.

الكتاب، الصفحة 171

وبرهان التوقع في الكتاب مكتوب كاملاً ومعنون «الإثبات (يترك لقراءة ثانية)»، أي إنه اختياري. وفكرته في سطر: في المجموع $\sum k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ تُستعمل المطابقة $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$ ، وهي في الكتاب بلا اسم، ثم يُخرج np عاملاً مشتركاً، فيبقى منشور ذي الحدين للأش $n - 1$ ، وهو $(p + q)^{n-1} = 1$.

انتبه: وتنبية على كلمة واحدة في الكتاب: يختم برهان التوقع بقوله «ويمكن بالمثل إثبات الجزء المتعلق بالتباين». والحقيقة أن برهان التباين ليس مذكوراً في الدرس أصلاً، ولا يمشي على المنوال نفسه: برهان التوقع يقوم على تلك المطابقة وعلى منشور ذي الحدين، والتباين يحتاج إلى خطوة أخرى. فلا تضيع وقتك في البحث عنه في الصفحة، ولا تفترض أنك ستجده بتكرار الخطوات نفسها. الصيغة $\mathbb{V}(X) = np(1 - p)$ تُحفظ وتُستعمل، وهذا ما يطلبه الامتحان.

تذكر: ورقابة مجانية على كل حساب بهذين: التباين لا يتجاوز التوقع أبداً، لأن $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X) \times (1 - p)$ و $1 - p \leq 1$ لا يتجاوز الواحد. وهو أصغر منه فعلياً كلما كان p موجباً تماماً، ويتساويان عند $p = 0$ وحدها حيث يكونان صفرين. فإن خرج عندك تباين أكبر من التوقع فقد أخطأت في أحدهما، ولا حاجة إلى إعادة الحساب كله لتعرف ذلك.

متحول عشوائي يتبع $\mathcal{B}(20, 0.3)$. ما $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{V}(X)$ ؟

| كيف أبداً؟ عوض مباشرة في مبرهنة 4، ثم طبق الرقابة: أيهما يجب أن يكون أصغر؟

(أ) $\mathbb{E}(X) = 6$ و $\mathbb{V}(X) = 4.2$

(ب) $\mathbb{E}(X) = 6$ و $\mathbb{V}(X) = 8.6$

(ج) $\mathbb{E}(X) = 0.3$ و $\mathbb{V}(X) = 0.21$

أ. نعم. $np = 20 \times 0.3 = 6$ ، و $np(1 - p) = 6 \times 0.7 = 4.2$. والرقابة تمشي: التباين أصغر من التوقع، كما يجب كلما كان p موجباً تماماً.

متى نستعمله، وكيف

تذكّر: علامة القانون الحداني في نصّ المسألة واحدة، يكتبها الكتاب صراحةً: كلما واجهت حساب احتمال تحقق حدث S عدداً k من المرات عند تكرار اختبار عشوائي n مرة على نحو مستقلّ احتمالياً. وأمثله المرجعية ثلاثة: إلقاء نرد أو قطعة نقود عدّة مرّات، والسحب المتتالي مع الإعادة، وإلقاء عدّة قطعٍ متماثلة في آنٍ معاً. وانتبه إلى الثانية: «مع الإعادة» هي الشرط: دونها لا تبقى السحبات مستقلة، لأنّ احتمال النجاح في السحبة التالية، مشروطاً بما ظهر قبلها، يتغيّر، فتسقط مبرهنة 3.

انتبه: والثالثة تستحقّ وقفة: أن يكون إلقاء خمس قطعٍ معاً مكافئاً لإلقاء قطعة واحدة خمس مرّات ليس مبرهنَةً بل افتراضاً، والكتاب يكتبه بهذه الصفة: «إذ نقبل أنّه». فاعرف أنك تقبل نموذجاً لا تستنتج نتيجة. والاختبار البرنولي هنا هو إلقاء قطعة واحدة، و n عدد القطع.

مثال الكتاب صفحة 172. نلقي خمس قطع نقود متوازنة في آنٍ معاً. ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرّات فقط؟

$$\mathbb{P}(X = 3) = ?$$

1. **سمّ الوسيطين والنجاح** الاختبار البرنولي هو إلقاء قطعة واحدة، والنجاح ظهور H ، والقطع متوازنة فاحتماله نصف. والقطع خمس، فالتجربة خمسة اختبارات.

$$n = 5, \quad k = 3, \quad p = \frac{1}{2}$$

2. **عوّض في الصيغة** لا شيء آخر. وهذا هو معنى «صيغةً تحلّ عائلةً»: بعد تعيين الوسيطين لم يبق تفكير.

$$\mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

3. **احسب** $\binom{5}{3} = 10$ ، والقوتان تجتمعان في $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ لأنّ $p = q$ هنا.

$$= 10 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{16}$$

ولاحظ خصوصيّة القطعة المتوازنة: لَمّا كان $p = q = \frac{1}{2}$ صار لكلّ الكلمات الاحتمال نفسه، أي $\frac{1}{32}$ ، فلم يبقَ إلّا عدّ الكلمات. في هذه الحالة وحدها يعود القانون الحداني إلى عدّ بسيط، وفي غيرها لا.

$$p = q = \frac{1}{2} \implies \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$$

مثال الكتاب صفحتي 172 و 173، وفيه الحيلة الأهمّ. نلقي ستّ مرّات حجر نرد مثالي، و A هو الحدث «الحصول مرّتين على

الأقلّ على 5 أو 6». ما $\mathbb{P}(A)$ ؟

$$\mathbb{P}(A) = ?$$

1. ① النجاح حدث لا نتيجة النجاح هنا «ظهور 5 أو 6»، ووجهان من ستة يحققانه. ف p ليس سدساً بل ثلثاً. ومن أخذ سدساً بنى كل ما بعده على رقم خاطئ.

$$p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad n = 6$$

2. ② «على الأقل» تعني المتقمة لو حسبت مباشرة لجمعت خمسة حدود، من $k = 2$ إلى $k = 6$. والكتاب ينصح: كلما رأيت «على الأقل» فانظر في المتقمة أولاً. ومتقمة «مرتبتين على الأقل» هي «صفر أو مرة واحدة»، حدان لا خمسة.

$$A' = (X = 0) \cup (X = 1)$$

3. ③ والحدان متنافيان، فيجمعان لا يقع الحدثان معاً، فينطبق جمع الاحتمالات. وهذا بالضبط ما تحدّر منه الفقرة الوحيدة من أخطاء الوحدة: لا تجمع قبل أن تتيقّن من التنافي. هنا التيقّن سهل، ف X لا يأخذ قيمتين معاً.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 0) &= \left(\frac{2}{3}\right)^6 \\ \mathbb{P}(X = 1) &= 6 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^5 \end{aligned}$$

4. ④ اجمع ثم اطرح من واحد أخرج $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ عاملاً مشتركاً فيصير الجمع سهلاً: $\left(\frac{2}{3} + 2\right) \left(\frac{2}{3}\right)^5$.

$$\mathbb{P}(A') = \frac{256}{729}, \quad \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{256}{729} = \frac{473}{729}$$

وهذه العادة تنفعك في كل ما تبقى من الاحتمالات: عُدّ الحدود قبل أن تحسب. «على الأقل اثنان من ست» خمسة حدود، ومتقمتها حدان. وكلما كان العدد المطلوب صغيراً قياساً بـ n كانت المتقمة أقصر، والعكس بالعكس: «على الأقل اثنان من ست» متقمتها حدان، و«على الأقل خمس من ست» متقمتها خمسة والحساب المباشر حدان. القرار يُتخذ قبل القلم لا بعده.

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)$$

صندوق فيه كرات حمراء وبيضاء، وعدد الحمراء ثلاثة أضعاف عدد البيضاء. نسحب ثلاث كرات على التوالي ومع الإعادة. ما قانون X ، عدد الحمراء المسحوبة؟

كيف أبدأ؟ احسب p من النسبة أولاً: إن كانت البيضاء b فالحمراء $3b$ والمجموع $4b$. ثم تحقق من شرطي مبرهنة 3.

$$\mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right) \quad (\text{أ})$$

(ب) لا يتبع قانوناً حدائياً، لأن السحب متتالي

$$\mathcal{B}\left(3, \frac{3}{4}\right) \quad (\text{ج})$$

ج. نعم. النسبة تعطي $p = \frac{3b}{4b} = \frac{3}{4}$ ، والسحب مع الإعادة فالاختبارات مستقلة ومتماثلة، والعدد ثلاثة. مثلاً

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{1}{4} = \frac{27}{64}$$

نلقي حجر نردٍ متوازن ثماني مَرَّات. ما احتمال الحصول على عددٍ زوجيٍّ ثلاث مَرَّاتٍ على الأقلِّ؟

كيف أبدأ؟ «على الأقلِّ ثلاث» من ثمانٍ: كم حدًّا في الحساب المباشر وكم في المتقمة؟ اختر الأقصر. و p هنا بسيط.

$$(أ) \quad 1 - \frac{37}{256} = \frac{219}{256}$$

$$(ب) \quad \frac{37}{256}$$

$$(ج) \quad 1 - \frac{1+8}{256} = \frac{247}{256}$$

أ. نعم. $p = \frac{1}{2}$ ، والمتقمة ثلاثة حدود: $37 = 1 + 8 + 28 = \binom{8}{0} + \binom{8}{1} + \binom{8}{2}$ ، على $2^8 = 256$.
والحساب المباشر كان ستّة حدود، فالمتقمة أقصر بالنصف.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 169 إلى 173 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.