

بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

المتحوّلات العشوائية

حين يصير كلّ ناتج عدداً، ويصير السؤال عن العدد لا عن الناتج
الاحتمالات . الوحدة 7 . الدرس 2

حتى الآن كانت الأحداث مجموعاتٍ من النتائج: «ظهر وجهٌ زوجي»، «سُحبت كرةٌ سوداء». وفي كثيرٍ من المسائل لا يهتمنا الناتج نفسه بل عددٌ مرافقٌ له: الربح، الخسارة، عدد الكرات البيضاء، مجموع الوجهين. وهذا الدرس يعطي هذا الربط اسماً ويجعله أداة. ولاحظ من الآن جملةً ينبئ عليها الكتاب بمصباح: المتحوّل العشوائي ليس متحوّلاً، بل هو تابع. لا تبحث عن قيمته بحلّ معادلة، بل أعطه ناتجاً من التجربة فيعطيك عدداً.

تعريف المتحوّل العشوائي

يبدأ الكتاب بالفكرة قبل الاسم: «من الشائع ربط كلّ نتيجة في تجربة عشوائية بعدد حقيقي». ثم يأتي بمثالٍ قبل التعريف. نلقي ثلاث قطع نقودٍ متوازنةٍ مرقّمة، ونسجّل الوجه الظاهر لكلّ قطعة، فيكون Ω مجموعة الكلمات الثماني المؤلفة من H و T . ولنتخيّل لعبةً نربح فيها ليرةً كلّما ظهر T ونخسر ليرةً كلّما ظهر H . فالتابع الذي يقرن بكلّ نتيجةٍ ربخها، موجباً كان أو سالباً، هو متحوّلٌ عشوائيٌ نسّميه X .

-3	-1	1	3
HHH	HHT	TTH	TTT
	HTH	THT	
	THH	HTT	

النتائج الثماني مرتبةً تحت قيمها الأربع. والكتاب يرسم هذا بشكلٍ لا بجدول: حقلان مؤطران، في الأسر النتائج الثماني وفي الأيمن القيم الأربع، وبينهما ثماني قطعٍ برتقاليةٍ بلا رؤوس أسهم. والمعنى واحد، وهو الذي يهمّ: ثماني نتائج تقع على أربع قيمٍ فقط، فليست المرافقة واحداً لواحد. ولاحظ العمودين الأوسطين: ثلاث نتائج لكلّ منهما، وهذا سبب الكسر ثلاثة أثمان بعد قليل.

تعريف 3

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية. تُسمّى متحوّلاً عشوائياً كلّ تابع معرّف على Ω ويأخذ قيمه في $\mathbb{R}$.
ولاحظ الرقم 3: عدّاد التعاريف يمشي عبر الوحدة كلّها، والتعريفان الأوّلان في الدرس السابق صفحة 155.

الكتاب، الصفحة 162

انتبه:  والاسم مضلل، والكتاب يعرف ذلك فيضع بجانبه مصباحاً ويكتب: «المتحول العشوائي ليس متحولاً بل هو تابع!». فلا تعامل X معاملة المجهول في معادلة: لا تنقله إلى الطرف الآخر، ولا تحلّ من أجله، ولا تعوّض فيه عدداً على أنّه قيمةً لمجهول. إنّه آلة تأخذ ناتجاً من Ω وتردّ عدداً، لا أكثر. وقد يكون الناتج نفسه عدداً، كما في حجر النرد. ويصطلح الكتاب على الرموز X و Y و Z لهذه التوابيع.

في مثال القطع الثلاث، ما $X(HTH)$ ؟

كيف أبدأ؟ عدّد الوجوه: كلّ T يضيف ليرةً وكلّ H ينقص ليرة. ولا تبحث عن صيغةٍ لـ X ، فالكتاب لا يكتب له صيغةً أصلاً.

(أ) 1

(ب) لا يمكن التعيين، ف X مجهولة

(ج) -1

ج. نعم. H ثمّ T ثمّ H يعطي $-1 + 1 - 1 = -1$. وانظر في الجدول أعلاه: HTH يقع فعلاً في عمود -1 ، مع HHT و THH .

قانون الاحتمال

قبل أن نكتب شيئاً، اتّفاق في الكتابة يجب أن يسبق استعماله. حين نكتب $(X = 1)$ فنحن لا نكتب معادلة. الكتاب يقولها صراحةً: «الصيغة $(X = x_i)$ لا تعبّر عن مساواة، ولكنها رمزٌ يستعمل في الاحتمالات للدلالة على الحدث». أي إنّ $(X = 1)$ اسمٌ لمجموعةٍ جزئيةٍ من Ω ، هي مجموعة النتائج التي صورتها وفق X تساوي 1. ولا يجوز فيها نقلٌ حدّ ولا قسمةً طرفين.

تذكّر: ومن هنا طريقٌ واحدٌ لحساب $\mathbb{P}(X = x_i)$ لا ثاني له: ابحث أولاً عن المجموعة الجزئية A من Ω التي صور عناصرها هي x_i ، فالحدث A هو $(X = x_i)$ نفسه، ثمّ احسب $\mathbb{P}(A)$. لا تخمّن العدد من شكل x_i ، بل اكتب المجموعة. والكتاب يؤخّر هذا الشرح إلى ما بعد استعماله بصفتين، ونحن نقدّمه لأنّه المفتاح.

مثال الكتاب صفحة 162، وهو المثال السابق نفسه. ما احتمال الحدث «ربح ليرة واحدة»، أي $\mathbb{P}(X = 1)$ ؟

$$\mathbb{P}(X = 1) = ?$$

1. ① اكتب المجموعة لا العدد يقع هذا الحدث حين تكون النتيجة واحدة من TTH أو THT أو HTT ، أي حين يظهر T مرتين و H مرة واحدة. فالحدث مجموعة فيها ثلاثة عناصر.

$$(X = 1) = A = \{HTT, THT, TTH\}$$

2. ② ثم احسب احتمال المجموعة القطع متوازنة، فالنتائج الثماني متساوية الاحتمال، ولولا كلمة «متوازنة» في نص المسألة لما جاز هذا السطر. والاحتمال حينئذٍ نسبة عدد العناصر.

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$$

3. ③ وافعل ذلك بكل قيمة للقيمة -3 نتيجة واحدة، ول -1 ثلاث، ول 1 ثلاث، ول 3 واحدة. وهذه هي أعمدة الجدول في أول الدرس، معدودة.

$$\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$$

والمجموع يجب أن يكون واحداً، وهو أرخص تحقق في الدرس كله: $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$. فإن لم يخرج واحداً فقد أضعت حالة أو عدت حالة مرتين، ولا داعي لأن تكمل.

$$p'_1 + p'_2 + \dots + p'_m = 1$$

x	-3	-1	1	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تعريف 4

ليكن X متحولاً عشوائياً مجموعة قيمه I . قانون احتمال X هو التابع المعرف على I الذي $p'_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ يقرب بكل x_i العدد p'_i . ولاحظ أن القانون تابع أيضاً، لكنه معرف على القيم لا على النتائج، ومجموعة القيم منتهية.

الكتاب، الصفحة 163

انتبه: وتنبيهان على الرموز. الأول: الشرطة في p'_i اسم لا اشتقاق. لا شيء يُشتق هنا، والشرطة تفرق هذا الرمز عن رموز أخرى لا غير، والكتاب يطبعها في موضع منفصل عن الحرف وهذا من الطباعة لا من المعنى. والثاني: في الجدول عمود لكل قيمة مختلفة، لا لكل نتيجة. ثماني نتائج أعطت أربعة أعمدة فقط، لأن النتائج التي تشترك في القيمة تجتمع في عمود واحد وتُجمع احتمالاتها.

ليكن $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ متساوي الاحتمال، و $X(a_1) = -3$ و $X(a_2) = 0$ و $X(a_3) = -3$ و $X(a_4) = 0$ و $X(a_5) = 1$. ما $\mathbb{P}(X = 0)$ ؟

كيف أبداً؟ اكتب المجموعة أولاً: أي العناصر صورتها صفر؟ ثم عُدّها واقسم على عدد عناصر Ω .

(أ) $\frac{2}{5}$

(ب) $\frac{1}{5}$

(ج) $\frac{1}{3}$

أ. نعم. $(X = 0) = \{a_2, a_4\}$ ، عنصران من خمسة. وهذا مثال الكتاب صفحة 164 بعينه. ولاحظ أنّ مجموعة القيم $I = \{-3, 0, 1\}$ فيها ثلاثة عناصرٍ لخمس نتائج، فالجدول ثلاثة أعمدةٍ لا خمسة.

التوقع والتباين والانحراف المعياري

تعريف 5

$$\mathbb{E}(X) = x_1 p'_1 + \dots + x_m p'_m$$

التوقع الرياضي: كلّ قيمةٍ مضروبةً باحتمالها، ثمّ الجمع. وهو وسطٌ موزون لا وسطٌ حسابي:

$$= \sum_{i=1}^m x_i p'_i$$

القيمة التي تتكرر أكثر تسحب الناتج نحوها.

التباين: وسطٌ موزون لمربعات الابتعاد عن التوقع. والتربيع يمنع تقابل الموجب والسالب،
ولذلك لا يكون التباين سالباً أبداً.

$$\mathbb{V}(X) = (x_1 - \mathbb{E}(X))^2 p'_1 + \dots + (x_m - \mathbb{E}(X))^2 p'_m$$

الانحراف المعياري: جذر التباين، لا مربّعه. والفائدة أنّه يعود إلى وحدة القيم نفسها، فإن كانت القيم ليراتٍ كان σ بالليرات و $\mathbb{V}$ بالليرات المربّعة.

الكتاب، الصفحة 163

خاصة

الصيغة المكافئة، وهي أسرع في الحساب لأنّها لا تطرح التوقع من كلّ قيمةٍ على حدة. وبرهانها في الكتاب سطران: انشر $(x_i - \mathbb{E}(X))^2$ ، ثم اضرب الطرفين بـ p'_i واجمع. وانتبه إلى موضع القوسين: مربّع التوقع يُطرح مرّةً واحدةً من المجموع كلّّه، لا من كلّ حدّ.

الكتاب، الصفحة 163

مثال الكتاب صفحتي 164 و 165. لعبةٌ بحجر نردٍ مثالي: نربح ليرتين إذا ظهر 1 ، وليرةً واحدةً إذا ظهر 2 ، ونخسر ليرةً في الحالات الأخرى. ما التوقع الرياضي؟

$$\mathbb{E}(X) = ?$$

1. ① عرّف التابع على النتائج $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، والنتائج متساوية الاحتمال لأنّ النرد مثالي. والتابع X يعطي 2 عند الوجه 1 ، و 1 عند الوجه 2 ، و -1 في الأربع الباقية.

$$\begin{aligned} X(1) &= 2, & X(2) &= 1 \\ X(3) &= X(4) = X(5) = X(6) \\ &= -1 \end{aligned}$$

2. ② اكتب القانون بالمجموعات $(X = 2)$ هو الحدث البسيط $\{1\}$ ، و $(X = 1)$ هو $\{2\}$ ، و $(X = -1)$ هو $B = \{3, 4, 5, 6\}$. ثلاث قيمٍ لست نتائج.

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(X = -1) = \frac{4}{6}$$

3. ③ تحقّق قبل أن تحسب $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = 1$. التحقّق يكلف سطرًا ويمنع أن تُبنى كلّ الحسابات التالية على قانونٍ ناقص.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{4}{6} = 1$$

4. ④ اضرب واجمع كلّ قيمةٍ في احتمالها. ولاحظ أنّ -1 وزنها أربعة أضعاف كلّ من الآخرين، وهي التي تقرّر الإشارة.

$$\mathbb{E}(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + (-1) \times \frac{4}{6} = -\frac{1}{6}$$

ويختتم الكتاب: «ولمّا كان التوقع سالباً. نخمّن أنّه إذا لعب اللاعب عدداً كبيراً من المرات فهو سيخسر». وانتبه إلى «عدداً كبيراً»، فهي ليست زينة. التوقع $-\frac{1}{6}$ ليرة ليس ربحاً ممكناً في لعبةٍ واحدة، إذ لا يأخذ X هذه القيمة أبداً: القيم الممكنة 2 و 1 و -1 لا غير.

$$\mathbb{E}(X) = -\frac{1}{6} \notin \{2, 1, -1\}$$

انتبه: وهذه هي المغالطة التي يحذّر منها الكتاب في سؤاله الثاني: «إنّ التوقع الرياضي كائنٌ رياضيّ وليس مقدار الربح المتوقع في لعبة ما». تخيّل لاعبين متكافئين يلعبان مرّةً واحدة: أحدهما يربح والآخر يخسر، ولا أحد منهما يقبض التوقع. ما يصحّ قوله هو أنّ أمل الربح يقترب من التوقع إذا تكرّرت اللعبة مرّاتٍ كثيرة، ولا شيء أكثر من ذلك.

وهنا ما لا يفعله الكتاب في هذا الدرس ولو مرّةً واحدة: حساب تباين. التعريف 5 يعرّف $\mathbb{V}$ و σ ، ثمّ ينتهي الشرح. وتطلب تمارين الصفحة 165 كلّها الستّ التباين، وتطلب السادسة منها الانحراف المعياري أيضاً. فلنحسبهما للعبة النرد نفسها، وبالطريقتين معاً.

$$\mathbb{V}(X) = ? \quad \sigma(X) = ?$$

1. ① الطريق الأول، بالتعريف: ابتعاد كل قيمة اطرح التوقع $-\frac{1}{6}$ من كل قيمة. والفرق موجب عند 2 و 1 وسالب عند -1 ، والترتيب يمحو الفرق في الإشارة.

$$2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}, \quad 1 + \frac{1}{6} = \frac{7}{6}$$

$$-1 + \frac{1}{6} = -\frac{5}{6}$$

2. ② رتب واضرب بالاحتمال واجمع كل مربع في احتمال قيمته. والمقام المشترك 216 يجعل الجمع سهلاً.

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \frac{169}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{49}{36} \times \frac{1}{6} + \frac{25}{36} \times \frac{4}{6} \\ &= \frac{169+49+100}{216} = \frac{318}{216} = \frac{53}{36} \end{aligned}$$

3. ③ الطريق الثاني، بالخاصة: مربعات القيم أولاً اجمع $x_i^2 p_i'$ كلها، ثم اطرح مربع التوقع مرة واحدة. لا مرتين ولا ثلاثاً، مرة واحدة من المجموع كله.

$$4 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{4}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{3}{2} - \left(-\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{54}{36} - \frac{1}{36} = \frac{53}{36}$$

4. ④ الناتجان متساويان، وهذا هو برهان الخاصة عملياً الطريق الثاني أقصر، وهو المفضل في الامتحان. والانحراف المعياري جذر التباين، ويترك بالجذر إن لم يكن العدد مربعاً كاملاً.

$$\mathbb{V}(X) = \frac{53}{36}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{53}}{6}$$

ورقابة مجانية على كل تباين تحسبه: يجب أن يكون موجباً، ويجب أن يكون معقول الحجم. هنا $\frac{53}{36}$ أي نحو 1.47 ، و σ نحو 1.21 ليرة، والقيم تتراوح بين -1 و 2 . انحراف أكبر من مدى القيم كله يعني أنك أخطأت، وانحراف سالب يعني أنك طرحت مربع التوقع من كل حد بدل أن تطرحه مرة واحدة.

$$\mathbb{V}(X) \geq 0$$

لعبة قانونها الاحتمالي $\mathbb{P}(X=0) = \frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{2}$. ما $\mathbb{V}(X)$ ؟

كيف أبدأ؟ احسب التوقع أولاً، فهو لازم للطريقين. ثم استعمل الخاصة، فهي أقصر.

(أ) 2

(ب) 1

(ج) 0

ب. نعم. $\mathbb{E}(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1$ ، ثم $\mathbb{V}(X) = 2 - 1^2 = 1$. وبالتعريف:

$(0-1)^2 \frac{1}{2} + (2-1)^2 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ ، والطريقان متفقان. وهنا $\sigma(X) = 1$ أيضاً، لأن جذر الواحد واحد.

إذا كان $V(X) = 9$ ، فما $\sigma(X)$ ؟

| كيف أبدأ؟ انظر إلى تعريف 5: أيهما جذر الآخر؟

(أ) 81

(ب) 3

(ج) 4.5

ب. نعم، $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{9} = 3$. والفائدة العملية: σ بوحدة القيم نفسها، فيمكن مقارنته بها مباشرةً، بخلاف التباين.

نلقي حجر نردٍ متوازن: نحصل على درجةٍ واحدةٍ عند الوجه 1 ، وستّ درجاتٍ عند الوجه 6 ، ونخسر درجتين في الباقي. ما $E(X)$ ؟

| كيف أبدأ؟ اكتب القانون في ثلاثة أعمدة، وتحقق أنّ مجموع الاحتمالات واحد، ثم اضرب واجمع.

(أ) $-\frac{1}{6}$

(ب) $\frac{5}{3}$

(ج) $\frac{7}{6}$

أ. نعم. $1 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6} + (-2) \times \frac{4}{6} = \frac{1+6-8}{6} = -\frac{1}{6}$. وهذه أولى تمارين الكتاب صفحة 165، وتوقعها يصادف أن يساوي توقع لعبة الررد في المثال.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 162 إلى 165 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.