



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين

جدول بمدخلين، وطريق مفتوح في اتجاه واحد فقط

الاحتمالات . الوحدة 7 . الدرس 3

في الدرس السابق كان على Ω متحول عشوائي واحد. والآن اثنان معاً، X و Y ، على فضاء العينة نفسه. والكلمة «نفسه» هي شرط الدرس كله: السحبة الواحدة تعين قيمتي المتحولين في آن واحد، ولذلك يصح أن نسأل عن وقوعهما معاً. وستتعلم ثلاثة أشياء بهذا الترتيب: كيف يكتب قانونهما المشترك في جدول بمدخلين، وكيف تستخرج منه قانون كل منهما على حدة، ثم الأهم: أن الطريق الأول مفتوح دائماً والثاني مسدود إلا في حالة واحدة، وهي حالة الاستقلال.

قانون الزوج

مثال واحد يحمل الدرس كله، وهو مثال الكتاب صفحة 166. صندوق فيه ثلاث كرات: واحدة حمراء تحمل الرقم 1، واثنان زرقاوان تحملان الرقمين 2 و 3. نسحب كرتين على التوالي مع الإعادة، فالصندوق يعود إلى حاله بعد السحبة الأولى، ولذلك يكون Ω مؤلفاً من تسع نتائج مرتبة، لا ست. والمقام تسعة في كل ما يأتي، وهو أول ما نتحقق منه.

ونعرف على المجموعة Ω نفسها متحولين لا متحولاً واحداً. الأول X يقرن بكل نتيجة عدد الكرات الزرقاء المسحوبة، فقيمه $I = \{0, 1, 2\}$. والثاني Y يقرن بكل نتيجة مجموع رقمي الكرتين، فقيمه $J = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. ولاحظ أن الأول يعد والثاني يجمع، ومن هنا اختلاف مجموعتي القيم. وخذ نتيجة واحدة لترى كيف يعمل الاثنان معاً: عند $(2, 1)$ ، أي الكرة 2 أولاً ثم الكرة 1، يكون $X = 1$ لأن زرقاء واحدة خرجت، و $Y = 2 + 1 = 3$. سحبة واحدة، قيمتان في آن واحد.

وقانون الزوج معناه إعطاء احتمال كل حدث من الشكل $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$. ولنحسب ثلاث خانات من الجدول، مرتبة من الأسهل إلى الأصعب، كما يفعل الكتاب.

$$p_{i,j} = \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

1. ① خانة بنتيجة واحدة متى يكون المجموع 2؟ فقط إذا خرجت الكرة 1 مرتين، أي عند النتيجة $(1, 1)$ وحدها. وعندها لا زرقاء أصلاً، ف $X = 0$. فالحدث مجموعة فيها عنصر واحد من تسعة.

$$(X = 0) \cap (Y = 2) = \{(1, 1)\}$$

$$p_{0,2} = \frac{1}{9}$$

2. ② خانتان فارغتان، والصفر جواب وفي العمود نفسه، هل يمكن أن يكون المجموع 2 مع زرقاء واحدة أو زرقاوين؟ لا، لأن أصغر رقم على كرة زرقاء هو 2 ، فمجموع أي سحبة فيها زرقاء أكبر من 2 . فالحدثان مستحيلان.

$$(X = 1) \cap (Y = 2) = \emptyset, \quad p_{1,2} = p_{2,2} = 0$$

3. ③ خانة بنتيجتين، والترتيب هو السبب زرقاء واحدة ومجموع 4 يعني الكرتين 1 و 3 ، وهما تأنيان بترتيبين لأن السحب على التتالي: (1, 3) و (3, 1) . ومن أهمل الترتيب كتب $\frac{1}{9}$ وأخطأ.

$$(X = 1) \cap (Y = 4) = \{(1, 3), (3, 1)\}$$

$$p_{1,4} = \frac{2}{9}$$

4. ④ وهكذا تُملاً الخانات الخمس عشرة ثلاث قيم لـ X وخمس لـ Y ، فخمسة عشرة خانة. أكثرها أصفار، وذلك لأن عدد الزرقاوات يقيّد المجموع تقييداً شديداً. والتحقّق الوحيد الذي تحتاجه: مجموع الخانات كلّها يساوي واحداً.

$$3 \times 5 = 15$$

والصفر في خانة ليس فراغاً تركته، بل نتيجة حسبتها: الحدث مستحيل. وهذا فرق عملي، لأن خانة صفريّة بجوار هامشين غير صفريّين تكفي وحدها لإثبات عدم الاستقلال، كما ستري في آخر الدرس.

$$p_{1,2} = 0 \neq p_1 \times p'_2$$

$\frac{Y}{X}$	2	3	4	5	6	p_i
0	$\frac{1}{9}$	0	0	0	0	$\frac{1}{9}$
1	0	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	0	$\frac{4}{9}$
2	0	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
p'_j	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

جدول الزوج كما في الكتاب صفحة 167. الخانة العليا مقسومةً بقطر في الكتاب، أعلاها Y وأسفلها X ، وهي هنا مكتوبة بالرمزين فوق بعضهما بالمعنى نفسه: الصفّ الأوّل قيم Y والعمود الأوّل قيم X . والعمود الأخير والسطر الأخير هما القانونان الهامشيان، ويفصلهما الكتاب عن الجدول بخطوطٍ متقطعة، لأنهما ليسا من قانون الزوج بل مستخرجان منه. والواحد في الزاوية مطبوع عند الكتاب بلون الجدول لا بالأسود، فهو مجموع كلّ شيء من أي جهة قرأت. ولاحظ الثلث مكتوباً ثلاثة أضعاف بلا اختزال، هكذا في الطبع.

تعريف 6

ليكن X و Y متحوّلين عشوائيين معرّفين على فضاء العينة ذاته Ω . يأخذ X القيم x_1 حتّى x_n ، ويأخذ Y القيم y_1 حتّى y_m . وتعريف قانون الزوج (X, Y) هو إعطاء الاحتمال $p_{i,j}$ لكل حدثٍ من هذا الشكل. والشرط الحامل هو «فضاء العينة ذاته»، وهو مكتوب في النصّ لا مضمّر: بغير تجربة واحدة تعيّن القيمتين معاً لا يوجد قانون مشترك أصلاً.

الكتاب، الصفحة 167

في المثال نفسه، ما $p_{2,4}$ ، أي احتمال أن تكون الكرتان زرقاوين ومجموعهما 4 ؟

| كيف أبدأ؟ اكتب النتائج التي تحقق الشرطين معاً، ثم غُدّها واقسم على تسعة. وتذكّر أنّ السحب مع الإعادة، فالنتيجة قد تتكرر.

(أ) $\frac{2}{9}$

(ب) 0

(ج) $\frac{1}{9}$

ج. نعم. زرقاوان ومجموعهما 4 يعني $2 + 2$ ، أي النتيجة $(2, 2)$ وحدها، وهي ممكنة لأنّ السحب مع الإعادة. عنصر واحد من تسعة.

القانونان الهامشيان

والآن سؤال الكتاب تحت عنوان تكريساً للفهم: كيف نحصل على قانون X وحده وقانون Y وحده انطلاقاً من قانون الزوج؟ والجواب في كلمة، اجمع. لكن الكلمة وحدها رديئة، لأنّها تُحفظ ولا تُفهم، والكتاب يعطي البرهان في ثلاثة أسطر سريعة. فلنمش فيها ببطء.

لماذا يعطي جمع سطرٍ كاملٍ احتمال X وحده؟ خذ السطر $X = 1$ في جدولنا، ومجموعه

$$0 + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + 0 + 0 = \frac{4}{9}$$

. نريد أن نعرف لماذا هذا العدد هو $\mathbb{P}(X = 1)$.

$$\mathbb{P}(X = 1) = ?$$

1. سَمِّ أحداث السطر أولاً لكلِّ قيمةٍ k من قيم Y سَمِّ الحدث $B_k = (Y = k)$. في مثالنا خمسة أحداث، من B_2 إلى B_6 . والكتاب يستعمل هذا الرمز ولا يعرفه في المثال، فسَمِّه أنت.

$$B_k = (Y = k), k \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. هذه الأحداث تجزئ Ω كلِّ نتيجةٍ لها مجموع واحد لا غير، فهي تقع في B_k واحدٍ بالضبط. فالأحداث الخمسة منفصلةً مثنى مثنى واجتماعها Ω كلّها، وهذا هو معنى تجزئة.

$$B_2 \cup B_3 \cup \dots \cup B_6 = \Omega$$

3. فالحدث $(X = 1)$ ينقسم معها خذ الحدث $(X = 1)$ وقاطعه بكلّ B_k . القطع الخمس منفصلةً مثنى مثنى أيضاً، واجتماعها هو $(X = 1)$ كلّها، لأنّ كلِّ نتيجةٍ فيه لها مجموع ما.

$$(X = 1) = ((X = 1) \cap B_2) \cup \dots \cup ((X = 1) \cap B_6)$$

4. ④ وهنا تدخل مبرهنة 1 من الدرس الأول تلك المبرهنة صفحة 155 تقول: احتمال حدث يساوي اجتماع أحداثٍ منفصلةٍ متني متني هو مجموع احتمالاتها. فينطبق هنا حرفاً بحرف، واحتمال كل قطعةٍ هو خانةٌ من السطر.

$$\mathbb{P}(X = 1) = p_{1,2} + p_{1,3} + p_{1,4} + p_{1,5} + p_{1,6} = \frac{4}{9}$$

فالجمع ليس اصطلاحاً بل نتيجة، وسببه أن قيم Y تجزئ الفضاء. ولو لم تكن التجزئة كاملةً لسقط السطر. ومن هنا الاسم: p_i من جمع الأسطر و p'_j من جمع الأعمدة، ويسميهما الكتاب القانونين الهامشيين لأنه يكتبهما على هامش الجدول.

$$p_i = \sum_j p_{i,j}, \quad p'_j = \sum_i p_{i,j}$$

تذكّر: وانتبه إلى الشرطة مرةً أخرى، فهي هنا تفرق بين متحولين لا بين صيغتين: p_i بلا شرطة يخص X دائماً، و p'_j بالشرطة يخص Y دائماً. ومعها تحققان مجانبان: مجموع p_i واحد، ومجموع p'_j واحد، ومجموع خانات الجدول كلها واحد أيضاً. ثلاث قراءاتٍ لعددٍ واحدٍ في زاوية الجدول.

انته: والآن الجملة التي يقوم عليها آخر الدرس، ويكتبها الكتاب في سطرٍ واحدٍ سريع: «ولكن عموماً، لا يمكننا استنتاج قانون الزوج (X, Y) انطلاقاً من قانوني X و Y . هذا ممكن فقط في حالة كون X و Y مستقلين». الطريق من الجدول إلى الهامشين مفتوح دائماً، والطريق من الهامشين إلى الجدول مسدودٌ إلا عند الاستقلال. والسبب بسيط: الهامشان يخبرانك كم مرةً تقع كل قيمةٍ على حدة، ولا تخبرانك أي قيمتين تقعان معاً.

في جدول المثال، ما $\mathbb{P}(Y = 4)$ ؟

كيف أبدأ؟ قيمة Y ثابتةٌ والمطلوب جمعٌ على كل قيم X . فهل تجمع سطراً أم عموداً؟ انظر إلى رأس الجدول لتعرف أي حرفٍ فوق وأي حرفٍ جانباً.

- (أ) $\frac{3}{9}$
(ب) $\frac{4}{9}$
(ج) $\frac{2}{9}$

أ. نعم، وهو مجموع عمود $Y = 4$: $\frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$. والكتاب يطبعه ثلاثة أوسعٍ بلا اختزال. وهذه أكبر قيمة في هامش Y ، وهو معقول: المجموع 4 يأتي بثلاث نتائج مختلفة.

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين

والاستقلال هنا ليس مفهوماً جديداً بل القديم مطبقاً على كل زوج. تعرف من الدرس الأول أنّ حدثين مستقلّان إذا كان احتمال تقاطعهما جداء احتماليهما. وهنا الأحداث كثيرة: $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ لكل زوج دليين. فالتعريف يطلب أن تتحقّق المساواة عند الجميع.

تعريف 7

نقول إنّ المتحولين العشوائيين X و Y مستقلّان احتمالياً إذا كان الحدثان $(X = x_i)$ و $(Y = y_j)$ مستقلّين احتمالياً أيّ كان i و j . حيث $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ و $p'_j = \mathbb{P}(Y = y_j)$. والكتاب يقول شرط الشمول مرتّين متتاليتين، «أيّ كان i و j » ثمّ في الجملة التالية «مهما كان i و j »، وليس ذلك تكراراً بلا سبب.

الكتاب، الصفحة 167

انتبه: والشرط نفسه متناظر في X و Y ، لكنّ الإثبات والنفي غير متناظرين، وهذا موضع الغلط الأشهر في الدرس. للإثبات يجب أن تتحقّق المساواة في كلّ خانة، ولا تكفي واحدة ولا اثنتان. وإذا فحصنا الشرط مباشرةً خانةً خانةً في جدولنا ذي الخمس عشرة خانة، فتلّك خمس عشرة مقارنة؛ أمّا من يستعمل مجاميع الأسطر والأعمدة فقد تكفيه مقارنات أقلّ. وللنفي تكفي خانة واحدة تخالف، وتتوقّف عندها. فالبحث عن الاستقلال عملٌ طويل، والبحث عن نفيه قد ينتهي في السطر الأول. وابدأ دائماً بخانةٍ صفريةٍ إن وُجدت، فهي الأسرع في الكشف.

فلنفحص مثالنا. هل X و Y مستقلّان احتمالياً؟ الجدول أمامك بهامشيّه، فلا يبقى إلا المقارنة.

$$p_{i,j} = p_i \times p'_j ?$$

1. اختر خانةً تكشف بسرعة الخانة العليا اليمني، أي $X = 0$ و $Y = 2$. هامشها $p_0 = \frac{1}{9}$ و $p'_2 = \frac{1}{9}$ ، وهما أصغر عددين في الهامشين.

$$p_0 = \frac{1}{9}, \quad p'_2 = \frac{1}{9}$$

2. احسب الجداء وقارن الجداء تُسع من تُسع، أي واحد من واحدٍ وثمانين. والخانة نفسها تُسع كامل، وهي أكبر بتسع مرّات.

$$p_0 \times p'_2 = \frac{1}{81} \neq \frac{1}{9} = p_{0,2}$$

3. وقف، فقد انتهى الفحص خانةً واحدةً خالفت، فالمتحولان ليسا مستقلّين احتمالياً. ولا داعي لفحص الأربع عشرة الباقية. ولاحظ المعنى: معرفة أنّ المجموع 2 تخبرك يقيناً أنّ عدد الزرقاوات صفر، فالخبر الأول يحدّد الثاني تماماً.

$$p_{0,2} \neq p_0 \times p'_2$$

وفي الكتاب سطرٌ فيه خطأ مطبعيٌّ عند هذا الموضع بعينه: يكتب $p_0 \times p_2 = \frac{1}{81}$ بلا شرطة على الثاني. والمقصود p'_2 ، وهو ما تراه أعلاه. ولو أخذت المطبوع حرفياً لكان $p_2 = \frac{4}{9}$ والجداء $\frac{4}{81}$ ، وهو ليس العدد المكتوب في الكتاب نفسه. فالحساب يكشف الشرطة الساقطة.

$$p_0 \times p_2 = \frac{4}{81} \neq \frac{1}{81}$$

وهنا ما يطلبه الكتاب في تَدْرَب ② ولا يحلّه: الاستقلال معطى، والجدول ناقص، والمطلوب ملؤه. هذا هو الموضع الوحيد الذي نُستعمل فيه المساواة أداةً لا فحصاً. معطى: $p_0 = 0.4$ و $p_2 = 0.4$ و $p'_0 = 0.3$ وخانة واحدة في الداخل، $p_{1,2} = 0.04$.

$$p_{i,j} = p_i \times p'_j$$

1. ① أكمل الهامش الأول بالتحقق مجموع هامش X واحد، وعندك اثنان من ثلاثة. فالثالث بالطرح.

$$p_1 = 1 - 0.4 - 0.4 = 0.2$$

2. ② واستعمل الخانة المعطاة عكسياً الاستقلال يقول $p_{1,2} = p_1 \times p'_2$. وأنت تعرف الخانة وتعرف p_1 ، فالمجهول واحد. اقسم.

$$p'_2 = \frac{0.04}{0.2} = 0.2$$

3. ③ أكمل الهامش الثاني بالتحقق نفسه مجموع هامش Y واحد أيضاً، وعندك 0.3 و 0.2 .

$$p'_1 = 1 - 0.3 - 0.2 = 0.5$$

4. ④ والآن كلّ خانةٍ جداء تسع خانات، كلٌّ منها جداء عددٍ من الهامش الأول في عددٍ من الهامش الثاني. مثلاً $p_{0,0} = 0.4 \times 0.3$ و $p_{1,1} = 0.2 \times 0.5$. وتحقق أخيراً أنّ مجموع التسع واحد.

$$p_{0,0} = 0.12, \quad p_{1,1} = 0.10$$

ولاحظ ما صار ممكناً: بهامشين وخانةٍ واحدةٍ بنينا جدولاً كاملاً. هذا بالضبط ما يمنعه الكتاب في الحالة العاقبة، ويسمح به هنا لأنّ الاستقلال معطى في نصّ المسألة. الاستقلال ليس سؤالاً في هذا التمرين بل شرطاً.

$$p_{i,j} = p_i \times p'_j$$

فحص طالب خانة واحدة فوجد $p_{i,j} = p_i \times p'_j$ ، فكتب أن المتحولين مستقلان. ما الحكم؟

| كيف أبدأ؟ اقرأ تعريف 7 مرة أخرى وابحث عن الشرط الذي يكرره الكتاب في جملتين متتاليتين.

(أ) استنتاجه صحيح، فالمساواة تحققت

(ب) استنتاجه خطأ، فالمساواة مطلوبة في الخانات كلها

(ج) لا يمكن الحكم إلا بحساب التوقع والتباين

ب. نعم. للإثبات يجب أن نتحقق المساواة في كل الخانات، والفحص المباشر خانة خانة في جدول من ثلاثة أسطر وخمسة أعمدة يعني خمس عشرة مقارنة. والجهة الأخرى رخيصة: خانة واحدة مخالفة تنفي الاستقلال وتنتهي الفحص.

في جدول لزوج من المتحولات، خانة قيمتها صفر وهامشها موجبان تماماً. ماذا تستنتج فوراً؟

| كيف أبدأ؟ احسب الجداء $p_i \times p'_j$ في هذه الحالة، وقارنه بالصفر.

(أ) أن الجدول فيه خطأ، فالخانة يجب أن تملأ

(ب) أن المتحولين ليسا مستقلين احتمالياً

(ج) أن المتحولين مستقلان، لأن الصفر لا يؤثر في الجداء

ب. نعم، وفي سطر واحد: جداء عددين موجبين تماماً موجب تماماً، والخانة صفر، فالمساواة تخيب عند هذا الزوج. وخانة واحدة مخالفة تكفي للنفي. وهذه أسرع طريقة لكشف عدم الاستقلال، فابحث عن الأصغار أولاً.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 166 إلى 168 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.