

بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الاحتمالات المشروطة

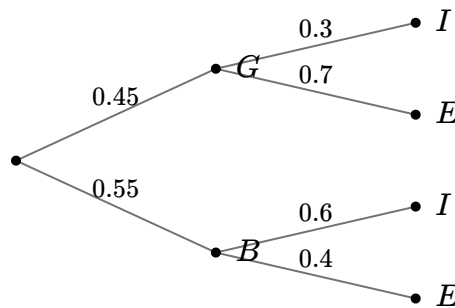
حين يغيّر خبرٌ واحدٌ كلّ الأعداد التي حسبتها

الاحتمالات . الوحدة 7 . الدرس 1

يكتب الكتاب خلف عنوان هذا الدرس، بين قوسين وبخطٍّ أصغر، كلمة «تذكّرة»، أي إنّه يعدّه مراجعةً لما سبق. ولا تصدّقها كلّها: صحيح أنّك تعرف Ω والحدث المعاكس والاجتماع والتقاطع من قبل، لكنّ فكرةً جديدةً تماماً تدخل هنا، وهي أنّ الاحتمال قد يتغيّر حين تعرف شيئاً. أسأل: ما احتمال أن يكون هذا المتعلّم مقيماً في المدينة السكنيّة؟ ثمّ اسأل السؤال نفسه بعد أن تعرف أنّ هذا المتعلّم أنثى. العددين مختلفان، والفرق بينهما هو كلّ ما في هذا الدرس. والأداة التي تحمل هذه الفكرة ليست صيغة بل رسماً: شجرة تبدأ من نقطة يساراً وتنمو يميناً، كلّ فرعٍ فيها يحمل عدداً وكلّ مسارٍ فيها حدث.

الاحتمال المشروط

لا يبدأ الكتاب بتعريف، بل بمدرسة. في مدرسةٍ ما 45% من المتعلّمين إناث، نرمز لهنّ بـ G ، و 55% ذكور، ونرمز لهنّ بـ B . ومن الإناث 30% يقمن في المدينة السكنيّة I و 70% عند أسرهنّ E ، ومن الذكور 60% في المدينة السكنيّة I و 40% عند أسرهم. نسحب بطاقةً واحدةً عشوائياً. ونلاحظ الآن أين تقف الأعداد: 45% تخصّ المدرسة كلّها، أمّا 30% فلا تخصّ المدرسة بل الإناث وحدهنّ. عدنان في الرسم نفسه، ومرجع كلّ منهما غير مرجع الآخر.



التمثيل الشجري للمثال، كما في الكتاب صفحة 154. الجذر نقطة صغيرة يساراً والشجرة تنمو يميناً، عكس اتجاه القراءة، لأنّ محورها زمنٌ لا لغة. المرحلة الأولى هي الجنس والثانية هي السكن. ونلاحظ أنّ عددي كلّ عقدة يجمعان إلى واحد، وهذا ما يسمّيه الكتاب قانون العُقْد.

تذكّر: قانون العُقْد: مجموع الاحتمالات المكتوبة على الفروع الصادرة من عقدةٍ واحدةٍ يساوي 1 . من عقدةٍ واحدة، لا من الشجرة كلّها. في هذا الرسم ستّة أعدادٍ ومجموعها 3 لا 1، لأنّها ثلاث عُقْد. وهذا أوّل موضعٍ يُخطئ فيه القارئ حين يجمع ما ليس صادراً من عقدةٍ واحدة.

والآن السؤال الذي يفتح الدرس: ما احتمال أن تكون البطاقة المسحوبة لطالبةٍ تقيم عند أسرتها، أي احتمال $G \cap E$ ؟
والكتاب لا يعطي صيغةً بعد، بل يُعَدُّ.

$$\mathbb{P}(G \cap E) = ?$$

1. ① عُدَّ بدل أن تحسب افترض أن عدد المتعلمين N . عدد الإناث $0.45 \times N$ ، ومن هؤلاء تقيم عند أسرتها النسبة 0.7 .
فالعدد المطلوب جداء الثلاثة.

$$0.45 \times N \times 0.7$$

2. ② والسحب متساوي الاحتمال لكل بطاقةٍ الفرصة نفسها، فالاحتمال هو عدد الحالات المواتية على عدد الحالات كلها. و N يختصر
من البسط والمقام، فلا يبقى له أثر.

$$\mathbb{P}(G \cap E) = \frac{0.45 \times N \times 0.7}{N} = 0.45 \times 0.7$$

3. ③ اقرأ ما يعنيه كل عاملٍ من العاملين العدد 0.45 هو $\mathbb{P}(G)$ بلا شرط. أمّا 0.7 فليس $\mathbb{P}(E)$ ، بل احتمال E داخل
الإناث وحدهنّ، وهذا ما نكتبه $\mathbb{P}(E | G)$. الأول مرجعه المدرسة، والثاني مرجعه الإناث.

$$\mathbb{P}(G \cap E) = \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}(E | G) = 0.315$$

فاحتمال المسار جداء عددي فرعيه، والعدد الثاني مشروط بالأول. هذه هي الجملة التي يقوم عليها الدرس كله، وقد خرجت من عدّ بسيطٍ
لا من تعريف. والتعريف يأتي بعدها في الكتاب، لا قبلها.

$$\mathbb{P}(G \cap E) = \mathbb{P}(G) \times \mathbb{P}(E | G)$$

تعريف 1

$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ ليكن B حدثاً يُحقَّق $\mathbb{P}(B) \neq 0$ ، ولنفترض أننا نعلم أنه قد وقع. عندئذٍ نعرّف الاحتمال المشروط
لوقوع حدث A علماً أنّ B قد وقع بهذه الصيغة. ولا يُشترط شيء على A .
 $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \cdot \mathbb{P}(B)$ ويسمّيها الكتاب الصيغة المفيدة، وهي التعريف نفسه مضروباً في المقام. وهي التي
تستعملها على الشجرة، لأنّ الشجرة تعطيك العاملين وتطلب منك الجداء.

الكتاب، الصفحة 155

انتبه: وثلاثة أعدادٍ تُخلط كثيراً، فافصلها بمثالٍ واحدٍ وثبته. في شجرة المدرسة: $\mathbb{P}(G) = 0.45$ يسأل عن الإناث في المدرسة
كلها، و $\mathbb{P}(E | G) = 0.7$ يسأل عن السكن داخل الإناث وحدهنّ، و $\mathbb{P}(G \cap E) = 0.315$ يسأل عن الاثنين معاً في
المدرسة كلها. ثلاثة أسئلةٍ وثلاثة أعداد. والفرق بينها ليس في الرموز بل في السؤال: ما مرجع المقارنة؟

في شجرة المدرسة، أيّ عددٍ يجيب عن السؤال «سحبنا بطاقةً ذكرٍ، فما احتمال أن يكون مقيماً في المدينة السكنية؟»
كيف أبدأ؟ الخبر المعطى يحدّد المرجع. حين تعلم أنّه ذكر، لم تعد المدرسة كلّها مرجع المقارنة. فابحث عن العدد المكتوب على فرعٍ يخرج من العقدة B .

$$(أ) \quad 0.55 \times 0.6 = 0.33$$

$$(ب) \quad 0.6$$

$$(ج) \quad 0.55$$

ب. نعم، وهو $\mathbb{P}(I | B)$ مكتوباً على الفرع مباشرةً. كلّ عددٍ على فرعٍ في المرحلة الثانية هو احتمالٌ مشروطٌ بالعقدة التي خرج منها. الشجرة لا تخفي الاحتمالات المشروطة، بل هي مصنوعةٌ منها.

الاستقلال الاحتمالي لحدثين

وقد يقع أن يكون الخبر بلا أثر. تسأل عن A ، ثمّ يقال لك إنَّ B قد وقع، فلا يتغيّر الجواب. هذه هي الحالة التي يستقيمها الكتاب الاستقلال الاحتمالي، ويعرّفها في أبسط صورةٍ ممكنة: جداء.

تعريف 2

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ إذا كان A و B حدثين في تجربةٍ احتماليةٍ واحدة، نقول إنَّهما مستقلّان احتمالياً إذا وفقط إذا تحقّقت هذه المساواة. ولاحظ «إذا وفقط إذا»: هي تعريفٌ بالمساواة لا نتيجةٌ منها. ولا يُشترط هنا أن يكون $\mathbb{P}(A)$ أو $\mathbb{P}(B)$ غير معدوم.

الكتاب، الصفحة 155

تذكّر: والصلة بالتعريف الأوّل تُريك لماذا هذا هو التعريف الصحيح: إن كان $\mathbb{P}(B) \neq 0$ فاقسم طرفي المساواة على $\mathbb{P}(B)$ ، فيصير $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$. أي إنَّ معرفة وقوع B لم تغيّر شيئاً في احتمال A . هذه هي الجملة التي تحفظها، والجداء صياغتها التي لا تحتاج إلى قسمة ولا إلى شرطٍ على المقام.

انتبه: ولا تخلط «منفصلان» بـ «مستقلّان»، فهما لفظان متقاربان ومعنيان متعاكسان. منفصلان يعني $A \cap B = \emptyset$ ، أي

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0, \text{ أي إنَّ وقوع أحدهما يمنع الآخر تماماً، وهذا أشدّ تأثيراً ممكناً. ومستقلّان يعني}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \text{ أي لا تأثير أصلاً. فلا يجتمع الوصفان لحدثين احتمال كلٍّ منهما موجبٌ تماماً: لو كانا منفصلين}$$

$$\text{ومستقلّين لوجب } \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) = 0, \text{ وهذا يفرض أن يكون أحدهما مستحيلًا.}$$

نرمي حجر نرد متوازناً مرة واحدة. A هو «ظهور عدد زوجي» و B هو «ظهور العدد 5». ما العلاقة بين A و B ؟
كيف أبدأ؟ احسب $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$ و $\mathbb{P}(A \cap B)$ كلًّا على حدة، ثم قارن الأخير بجداء الأولين، وقارنه أيضاً بالصفر.

(أ) منفصلان، وليسا مستقلين

(ب) مستقلان، لأن الرمية واحدة ولا يؤثر أحدهما في الآخر

(ج) منفصلان ومستقلان معاً

أ. نعم. العدد 5 فردي، فلا يقع الحدثان معاً، أي $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. ولو كانا مستقلين لوجب أن يساوي هذا الصفر الجداء $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$ ، وليس كذلك. ومعرفة وقوع B تجعل A مستحيلاً، وهذا أبعد ما يكون عن انعدام التأثير.

التمثيل الشجري والقواعد العامة

مبرهنة 1

ليكن A حدثاً، ولنفترض أنه يساوي اجتماع أحداث منفصلة متني متني A_1 و A_2 حتى A_n . والكتاب يلون «منفصلة متني متني» بالأزرق، لأن الشرط هو كل شيء: بدونه يُعد التقاطع مرتين.

الكتاب، الصفحة 155

مثال الكتاب صفحتي 155 و 156. صندوق فيه عشر كرات: كرتان زرقاوان B ، وخمس خضراء G ، وثلاث حمراء R . نسحب كرتين واحدة بعد الأخرى، عشوائياً ودون إعادة. ما احتمال أن تكون الثانية زرقاء، أي $\mathbb{P}(B_2)$ ؟

$$\mathbb{P}(B_2) = ?$$

1. ① المرحلة الأولى بلا شرط قبل أي سحب، الصندوق كامل. فالاحتمالات الأولى نسب بسيطة من عشرة.

$$\mathbb{P}(B_1) = 0.2, \quad \mathbb{P}(G_1) = 0.5$$

$$\mathbb{P}(R_1) = 0.3$$

2. ② المرحلة الثانية مشروطة بما خرج دون إعادة، فبعد السحب الأول تسع كرات. إن خرجت زرقاء بقيت زرقاء واحدة من تسع. وإن خرجت خضراء أو حمراء بقيت الزرقاوان. لاحظ أن المقام تغير، وهذا هو أثر «دون إعادة» كله.

$$\mathbb{P}(B_2 | B_1) = \frac{1}{9}, \quad \mathbb{P}(B_2 | G_1) = \mathbb{P}(B_2 | R_1) = \frac{2}{9}$$

3. ③ اضرب على كل مسار ثلاثة مسارات تؤدي إلى B_2 ، واحتمال كل مسار جداء عددي فرعيه بالصيغة المفيدة من تعريف 1.

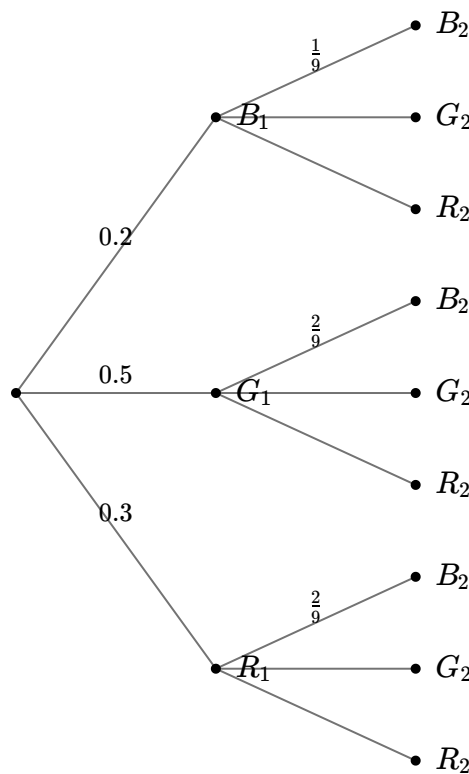
$$\frac{1}{5} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}, \quad \frac{1}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}, \quad \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15}$$

4. ④ **واجمع بين المسارات** المسارات الثلاثة أحداث متنافية، أي لا يقع اثنان منها معاً، فينطبق عليها مبرهنة 1. والكتاب يكتب في المبرهنة «منفصلة» وهنا «متنافية»، واللفظان عنده لشيء واحد. وهنا تُجمع لا تُضرب: الضرب على طول المسار الواحد، والجمع بين المسارات.

$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{1}{45} + \frac{1}{9} + \frac{1}{15} = \frac{9}{45} = \frac{1}{5}$$

ولاحظ الجواب: $\frac{1}{5}$ هو بعينه $\mathbb{P}(B_1)$. وليست مصادفة، فالفكرة الثانية لا تعلم أنّها ثانية ما دمت لا تنظر إلى الأولى. وهو تحقق مجاني يستحق الانتباه.

$$\mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{1}{5}$$



شجرة الكرات، كما في الكتاب صفحة 156. تسعة فروع في المرحلة الثانية، وليس على كل فرع عدد: الكتاب يكتب العدد على الفرع المؤدي إلى الأزرق وحده، لأنّ السؤال عنه. ولو كُتبت الأعداد التسعة لكان مجموعها ثلاثة لا واحداً، فقانون العُقْد يخص كل عقدة على حدة.

تذكّر: ويجمع الكتاب في الفقرة 4.1 خمس قواعد للشجرة، بلا كتلة مرقمة بل نقاطاً على صفحتين. الأولى: كل عقدة توافق حالة من حالات التجربة. والثانية هي قانون العُقْد. والثالثة: المسار التام من الجذر إلى طرف نهائي يمثل تقاطع كل الأحداث التي يمر بها، ونطابق عادةً بين المسار والحدث. والرابعة: احتمال المسار جداء احتمالات فروعه. والخامسة: احتمال الحدث B مجموع احتمالات المسارات التي تقود إليه. والقاعدتان الأخيرتان هما ما فعلته للتوّ في الخطوتين ③ و④.

مبرهنة 2

لنفترض أن فضاء العينة Ω هو اجتماع أحداث A_1 حتى A_n متنافية متني متني. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B | A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(B | A_n)$ عندئذٍ يُحسب احتمال أي حدث B بهذه الصيغة. والشرط الحاسم أن الاجتماع هو Ω كله: تجزئة لا تترك حالة خارجها.

الكتاب، الصفحة 157

انتبه: وهنا نقص في الكتاب لا في قراءتك: نص مبرهنة 2 لا يذكر الشرط $\mathbb{P}(A_k) \neq 0$ ، مع أن برهانه في الصفحة نفسها يستعمل $\mathbb{P}(A_k \cap B) = \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(B | A_k)$ ، والطرف الأيمن لا وجود له إن كان $\mathbb{P}(A_k) = 0$. فأضفه أنت عند التطبيق، ولا تحذف الحالة من التجزئة: التجزئة يجب أن تبقى كاملةً وإلا سقط شرط المبرهنة. وعملياً لا يضر: إن كان $\mathbb{P}(A_k) = 0$ فالاحتمال المشروط غير معرّف، لكن $\mathbb{P}(A_k \cap B) = 0$ مباشرةً، فتكتب حد هذه الحالة صفراً ولا تكتبه جداءً.

في شجرة الكرات، ما قيمة $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2)$ ؟

| كيف أبدأ؟ الحدث المطلوب مسار واحد لا مجموعة مسارات. فاسأل: أضرب أم أجمع؟ والقاعدة الرابعة تجيب.

$$(أ) \quad 0.2 + \frac{1}{9} = \frac{14}{45}$$

$$(ب) \quad 0.2 \times \frac{2}{10} = \frac{1}{25}$$

$$(ج) \quad 0.2 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{45}$$

ج. نعم، وهو المسار الأول من الثلاثة. جداء عددي الفرعين، والعدد الثاني مشروط بالأول ومقامه تسعة لأن كرة خرجت ولم تعد.

قراءة الشجرة عكس اتجاهها

حتى الآن سار كل شيء مع الزمن: تختار ثم تسحب، وتمشي على الشجرة من الجذر يميناً. والسؤال الذي يأتي الآن يمضي عكس ذلك: النتيجة معلومة والسبب مجهول. «سحبنا كرة سوداء، فما احتمال أنها من الصندوق الأول؟» ولهذا السؤال شكل لا يتغير: يعطيك المتأخر ويسألك عن المتقدم. والكتاب يجيب عنه في سطرين ويكتب «تعريفاً لدينا»، بلا اسم ولا رسم. وهو أصعب موضع في الدرس، فخذ بهبط.

مثال الكتاب صفحة 158، «اختيار صندوق ثم كرة». الصندوق U_1 فيه كرة سوداء وكرتان بيضاوان. والصندوق U_2 فيه كرتان سوداوان وكرتان بيضاوان وكرة حمراء. نختار صندوقاً عشوائياً ثم نسحب منه كرة عشوائياً. وليكن B حدث سحب كرة سوداء. المطلوب $\mathbb{P}(B)$ أولاً، ثم احتمال أن تكون من U_1 بعد أن رأيناها سوداء.

$$\mathbb{P}(B) = ? \quad \mathbb{P}(U_1 | B) = ?$$

1. ① مع الزمن: مساران يهبطان الصندوقان متساويا الفرصة. ومن U_1 كرة سوداء من ثلاث، ومن U_2 كرتان سوداوان من خمس. ولا حاجة إلى رسم الشجرة كاملةً، فمساران فقط يقودان إلى B .

$$\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B | U_1) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(B | U_2) = \frac{2}{5}$$

2. ② اضرب واجمع، وهذه مبرهنة 2 بعينها الصندوقان يشكّلان تجزئة لـ Ω : لا بدّ أن يكون أحدهما، ولا يكونان معاً. فتنطبق مبرهنة 2 بشروطها.

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

3. ③ عكس الزمن: اكتب السؤال بالرموز أولاً المعطى صار B والمطلوب صار U_1 . فبدّل المواضع في تعريف 1 ولا تفكّر في الشجرة بعد. والقاعدة التي تحمي من الخلط: المشروط به هو ما تعرفه، لا ما وقع أولاً في الزمن.

$$\mathbb{P}(U_1 | B) = \frac{\mathbb{P}(U_1 \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

4. ④ والبسط تعرفه من الاتجاه الأول $\mathbb{P}(U_1 \cap B)$ هو المسار الأول، وقد حسبته في الخطوة ②. فالاتجاه العكسي لا يحتاج إلى معطيات جديدة، بل يعيد ترتيب ما بين يديك: مسار واحد مقسوماً على مجموع المسارات.

$$\mathbb{P}(U_1 | B) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11}$$

وَصَّعِ العديدين جنباً إلى جنب، فهذا هو درس الصفحة كلّها: $\mathbb{P}(B | U_1) = \frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(U_1 | B) = \frac{5}{11}$. الأول يسأل عن الكرة والصندوق معلوم، والثاني يسأل عن الصندوق والكرة معلومة. عدنان مختلفان لسؤالين مختلفين، ولا يحلّ أحدهما محلّ الآخر. وطريق الاتجاه العكسي واحد دائماً: مجموع المسارات التي تحقّق المطلوب والمعلوم معاً، على مجموع المسارات التي تعطي المعلوم. وهنا الأول مسار واحد.

$$\mathbb{P}(U_1 | B) = \frac{\mathbb{P}(U_1)\mathbb{P}(B | U_1)}{\mathbb{P}(B)}$$

في المثال نفسه، ما احتمال أن تكون الكرة السوداء قد سُحبت من U_2 ؟

كيف أبداً؟ لا تُعدّ الحساب من أوله. الصندوقان يستنفدان كلّ الحالات، فما الذي يجب أن يكون مجموع الاحتمالين؟

(أ) $\frac{2}{5}$

(ب) $\frac{11}{30}$

(ج) $\frac{6}{11}$

ج. نعم. علمنا أنّ الكرة سوداء، فلا بدّ أنّها من أحد الصندوقين، فالاحتمالان يجمعان إلى واحدٍ و $\frac{6}{11} = 1 - \frac{5}{11}$. وبالحساب المباشر $\frac{6}{11} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{11}{30}}$ ، والطريقان متّفقان.

التجارب المستقلة احتمالياً

وحالة أخيرة تختصر العمل كله: أن تكون مراحل التجربة مستقلة بعضها عن بعض. حينئذٍ يبقى الشكل شجرة، لكن الأعداد على المرحلة الثانية لم تعد تتغير بحسب ما سبقها، فهي مشروطة في الصورة وغير مشروطة في القيمة. والكتاب يشدد على أمر يُنسى: استقلال مراحل التجربة لا تقرأه من شكل الشجرة، بل هو افتراض من افتراضات النموذج، ويجب أن يُنص عليه صراحةً عند طرح السؤال. وهذا غير استقلال حدثين معلوم احتمالهما، فذاك تتحقق منه بالحساب كما رأيت.

تذكّر: وأربع حالات مرجعية يعدها الكتاب مستقلة عادةً: تكرار إلقاء حجر نرد أو قطعة نقود عدداً من المرات، وإلقاء عدة قطع أو أحجار معاً، والسحب من صناديق مختلفة، والسحب المتكرر من الصندوق نفسه مع الإعادة. وانتبه إلى الأخيرة: «مع الإعادة» هي التي تجعل الصندوق مستقلاً عن نفسه، و«دون إعادة» تنقضه. وهذا بعينه الفرق بين المثال الآتي ومثال الكرات السابق.

مثال الكتاب صفحتي 158 و159. ثلاثة صناديق: U_1 فيه حروف كلمة SAVE، و U_2 حروف OUR، و U_3 حروف SOULS. نسحب من كل حرفاً بالترتيب ونكتب الناتج مرتباً، والسحبات مستقلة بعضها عن بعض. ما احتمال الحصول على الكلمة SOS؟

$$\mathbb{P}(SOS) = ?$$

1. ① ولا ترسم الشجرة لو رسمتها على الأوراق لكان لها ستون طرفاً نهائياً، وكلها متساوية الاحتمال. ولا حاجة إلى الرسم، فالمسار يُكتب مباشرة، وهذا ما يقصده الكتاب بقوله إن إنشاء الشجرة كاملة ليس ضرورياً دوماً. وانتبه من الآن: الكلمة SOS لا يوافقها طرف واحد من الستين بل طرفان، وستعرف لماذا في الخطوة التالية.

$$4 \times 3 \times 5 = 60$$

2. ② عدّ الحروف في كل صندوق، وانتبه للمكرر في SAVE أربعة حروفٍ و S واحدة. وفي OUR ثلاثة و O واحدة. وفي SOULS خمسة حروفٍ و S فيها مرتان، فالبسط اثنان لا واحد. المقام عدد الأوراق في الصندوق والبسط عدد الأوراق المواتية، لا عدد الحروف المختلفة. وهنا سّر الطرفين: وقتاً S تعطيان مسارين مختلفين ينتهيان بالكلمة نفسها. والكتاب يرسم شجرته على الحروف المختلفة لا على الأوراق، فيكون فيها SOS «المسار الوحيد»، لكن أطرافها حينئذٍ ليست متساوية الاحتمال.

$$\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}$$

3. ③ ولماذا يجوز ضرب بهذه الأعداد العدد على الفرع الثاني هو في الأصل احتمال سحب O من الصندوق الثاني علماً أن S قد خرجت من الأول، وهو مشروطٌ بحسب موضعه. لكن الاستقلال المفترض يجعله مساوياً لاحتمال غير المشروط. فالصورة مشروطة والقيمة ليست كذلك.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}(A_3)$$

4. ④ اضرب مسار واحد، فلا جمع بعده.

$$\mathbb{P}(SOS) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$$

فالسؤال الذي تطرحه على كلِّ عددٍ في المرحلة الثانية واحد: هل تغيّر مقامه بسبب ما سبق؟ في الكرات تغيّر من عشرةٍ إلى تسعة، فالعدد مشروط حقاً. وفي الحروف لم يتغيّر، لأنّ الصناديق مختلفة ولا يمسّ أحدها الآخر. فالموضع في الشجرة لا يقرّر ذلك، بل يقرّره افتراض النموذج.

$$\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \mathbb{P}(A_2)$$

ثلاث قطعٍ من النقود: c_1 متوازنة، و c_2 و c_3 متماثلتان ومنحازتان باحتمال $\mathbb{P}(H) = \frac{3}{5}$. نلقيها جميعاً والنتائج مستقلة. ما احتمال ظهور H مرّة واحدة فقط؟

| **كيف أبدأ؟** «مرّة واحدة فقط» ليس مساراً واحداً بل عدّة مسارات. اكتبها كلّها أولاً، ثمّ اضرب داخل كلّ مسارٍ واجمع بينها.

(أ) $\frac{8}{25}$

(ب) $\frac{2}{25}$

(ج) $\frac{3}{8}$

أ. نعم. ثلاثة مسارات: $HTT = \frac{2}{25}$ و $THT = \frac{3}{25}$ و $TTH = \frac{3}{25}$ ، ومجموعها $\frac{8}{25}$. ولاحظ أنّ المسارين الأخيرين متساويان لأنّ القطعتين المنحازتين متماثلتان، والأوّل يختلف عنهما لأنّ H فيه على القطعة المتوازنة.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 154 إلى 161 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.