بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الارتباط الخطّي لثلاثة أشعّة

العبارة نفسها من الدرس السابق، لكنّها لم تعد تعني استقامةً بل مستوياً

الأشعّة في الفراغ . الوحدة 1 . الدرس 2

في الدرس السابق قلنا عن شعاعين إنّهما «مرتبطان خطّياً»، وكان ذلك يعني أنّهما على منحىً واحد. في هذا الدرس نقول العبارة نفسها عن ثلاثة أشعّة، وهي تعني شيئاً آخر تماماً: أنّها تقع في مستوٍ واحد. الكتاب لا يستعمل كلمةً خاصّة بهذا المعنى، بل يكتب «تقع في مستوٍ واحد»، فالتمييز يقع على عاتقك. القاعدة عمليّة وبسيطة: اعدد الأشعّة أوّلاً. شعاعان يعني استقامة، ثلاثة أشعّة يعني مستوياً.

كلمةٌ واحدة، معنيان

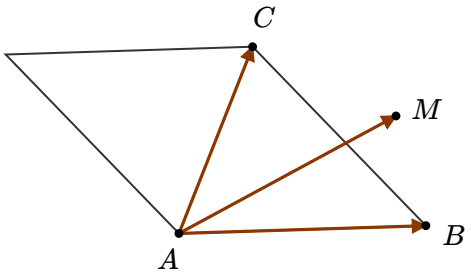
قبل أيّ حساب، ثبّت هذا التمييز، فهو مصدر أكثر الأخطاء في هذا الدرس. العبارة «مرتبطة خطّياً» لا تحمل معنىً ثابتاً، بل يتغيّر بعدد الأشعّة التي تصفها.

تذكّر: شعاعان مرتبطان خطّياً: يقعان على منحىً واحد، فحاملاهما متوازيان. وإن خرجا من نقطةٍ واحدة صارت النّقاط على استقامة واحدة. ثلاثة أشعّة مرتبطة خطّياً: تقع في مستوٍ واحد. الكلمة واحدة، والهندسة مختلفة. اعدد الأشعّة قبل أن تقرّر ما تعنيه.

انتبه: لا تبحث في ثلاثة أشعّة عن شعاعين على منحىً واحد لتستنتج الارتباط. الكتاب يحذّر من ذلك في المثال صراحةً: «ليس واضحاً من الشّكل وجود شعاعين مرتبطين خطّياً من بين الأشعّة الثّلاثة وقد لا يكون ذلك صحيحاً». ثلاثة أشعّة قد تقع في مستوٍ واحد من دون أن يكون أيّ اثنين منها على منحىً واحد.

المستوي بشعاعَي توجيه

الكتاب لا يبدأ بالأشعّة الثلاثة، بل بالمستوي. والسبب منطقيّ: ليقول إنّ ثلاثة أشعّة تقع في مستوٍ واحد، يحتاج أوّلاً وصفاً حسابيّاً للمستوي. هذا ما تقدّمه المبرهنة الآتية.



كلّ نقطة M من المستوي (ABC) تُكتب بشعاعَي التوجيه: $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC}$.

مبرهنة 3

لتكن $(ABC) = \left\{ M \;\middle|\; \overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC},\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R} \right\}$ ثلاث نقاط A و B و C ليست واقعة على استقامة واحدة. عندئذ المستوي (ABC) هو مجموعة النّقاط M المعرَّفة بهذه العلاقة.

الكتاب، الصفحة 10

ومع المبرهنة يأتي اسمان جديدان، يضعهما الكتاب بلونٍ مميّز: نقول إنّ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ «يوجّهان» المستوي (ABC) ، ونقول إنّهما «شعاعا توجيه» فيه. وفي إطارٍ جانبيّ يعمّم الكتاب ذلك بلا برهان: يتعيّن مستوٍ عموماً بنقطةٍ وشعاعين غير مرتبطين خطّياً، هما شعاعا توجيهه.

انتبه: الشرط «ليست واقعة على استقامة واحدة» ليس زينة. لو وقعت النّقاط الثلاث على استقامة واحدة لما كان (ABC) مستوياً أصلاً، ولانكمشت المجموعة $\left\{ x\,\overrightarrow{AB} + y\,\overrightarrow{AC} \right\}$ إلى استقامة. وانتبه أيضاً إلى أنّ x و y يجريان على $\mathbb{R}$ كلّها، لا على $[0, 1]$: مع التقييد تحصل على متوازي أضلاع، لا على المستوي.

يذكر هذا الدرس «شعاعا توجيه» لمستوٍ، ثمّ «شعاع توجيه» لمستقيم. ما الفرق؟

> **كيف أبدأ؟** عُدّ في كلّ حالة كم شعاعاً لزم لتعيين الشكل، ثمّ اسأل كم بُعداً لهذا الشكل. الرقم نفسه في المرّتين، وهذا ليس مصادفة.

أ) استقامة تحتاج شعاع توجيه واحداً، ومستوٍ يحتاج شعاعَي توجيه غير مرتبطين خطّياً

ب) لا فرق، الصيغتان اسمان لشيءٍ واحد

ج) الفرق أنّ شعاعَي التوجيه يجب أن يكونا متعامدين

أ. نعم. عدد أشعّة التوجيه هو عدد أبعاد الشكل: واحد للاستقامة، اثنان للمستوي. ولا بدّ أن يكونا غير مرتبطين خطّياً، وإلّا لوجّها الاستقامة نفسها.

تعريف الارتباط لثلاثة أشعّة

تعريف 2

نقول إنّ الأشعّة u و v و w مرتبطة خطيّاً، إذا وفقط إذا وُجدتْ نقطةٌ O تجعل $\overrightarrow{OA} = u,\quad \overrightarrow{OB} = v,\quad \overrightarrow{OC} = w$ النقاط O و A و B و C المعرّفة هكذا تقع في مستوٍ واحدٍ.

وعندئذ أيُّ نقطة O من الفراغ تُحقّق هذه الخاصّة. أي إنّ الأمر لا يتعلّق بنقطةٍ بعينها. $\forall O$

الكتاب، الصفحة 10

انتبه: التعريف يقول «وُجدتْ نقطةٌ O »، لا «لتكن O نقطةً معيّنة». ومع ذلك فالسطر الثاني يحسم الأمر: إن صحّت الخاصّة عند نقطةٍ واحدة صحّت عند كلّ نقطة. لذلك اختر O حيث يريحك الحساب، وغالباً رأساً من رؤوس الشكل.

ملاحظة

$k \in \mathbb{R}$, $v = k\,u$ عندما يكون الشّعاعان غير الصّفريّين u و v مرتبطين خطيّاً، تكون النّقاط O و A و B على استقامة واحدة، فيوجد على الأقل مستوٍ يحوي المستقيم (OA) والنّقطة C ، وعندئذٍ تكون الأشعّة الثلاثة مرتبطة خطيّاً.

الكتاب، الصفحة 11

تذكّر: هذه الملاحظة تُغلق حالةً كاملة: إذا كان اثنان من الأشعّة الثلاثة على منحىً واحد، فالثلاثة مرتبطة خطّياً مهما كان الثالث. المستقيم الذي يحملهما والنقطة الثالثة يعيّنان مستوياً على الأقل، والثلاثة فيه.

من الصورة إلى الحساب

التعريف أعلاه صورةٌ في الذهن: أربع نقاط في مستوٍ واحد. لكنّك لا تستطيع أن تحسب به. المبرهنة الآتية تترجمه إلى معادلة، والجسر بينهما هو مبرهنة 3 من أوّل الدرس: إن كان u و v غير مرتبطين خطّياً، فهما شعاعا توجيه المستوي (OAB) ، ومبرهنة 3 تقول إنّ كلّ نقطة من ذلك المستوي تُكتب بهما. أن تقع C في المستوي يعني إذن أن يُكتب $\overrightarrow{OC}$ بهما. وهذه هي المعادلة.

مبرهنة 4

نفترض أنّ u و v ليسا مرتبطين خطيّاً. هذا الشرط ليس تفصيلاً، بل هو ما يجعل ما يليه صحيحاً. $\nexists k : v = k\,u \;\wedge\; \nexists k' : u = k'\,v$

عندئذ تكون الأشعّة u و v و w مرتبطة خطّياً إذا وفقط إذا وُجد عددان حقيقيّان a و b يحقّقان هذه المساواة. $w = a\,u + b\,v, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$

الكتاب، الصفحة 11

انتبه: لا تستعمل هذه المبرهنة قبل أن تتحقّق من شرطها. لو كان u و v مرتبطين خطّياً، لصار الكلام خاطئاً لا ناقصاً: يمكن عندئذ أن يقع w خارج منحاهما، فتكون الأشعّة الثلاثة مرتبطة خطّياً بحكم الملاحظة، ومع ذلك لا يوجد a و b يحقّقان المساواة. الشرط هو الذي يمنع هذه الحالة.

ثلاثة أشعّة، واثنان منها مرتبطان خطّياً. هل تُطبَّق مبرهنة 4؟

> **كيف أبدأ؟** اقرأ السطر الأوّل من الإطار أعلاه، لا السطر الثاني. المبرهنة تبدأ بجملة «نفترض»، فاسأل: هل الفرض متحقّق هنا؟ وإن لم يكن، فهل ذلك يعني أنّ الجواب مجهول أم أنّ لدينا أداةً أخرى؟

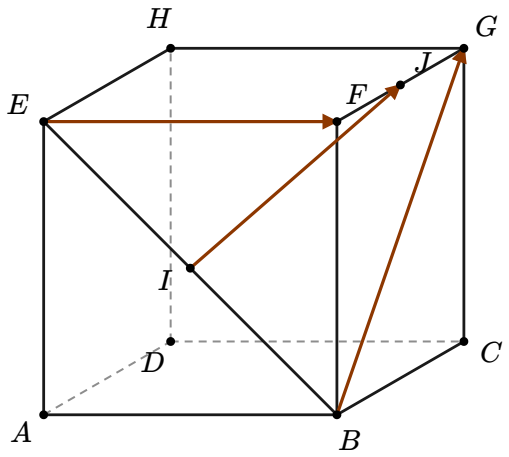
أ) لا، وعندئذ لا نعرف شيئاً عن الأشعّة الثلاثة

ب) لا، ولا حاجة إليها: الملاحظة تحسم الأمر مباشرة

ج) نعم، الفرض تفصيلٌ يمكن إهماله

ب. نعم. فرض المبرهنة غير متحقّق فلا تُستعمل، لكنّ الملاحظة تغطّي هذه الحالة بالضبط وتقول إنّ الثلاثة مرتبطة خطّياً.

الحيلة: جمع سلسلتَي شال



المكعّب $ABCDEFGH$ ، والنقطة I منتصف القطر $[BE]$ لا منتصف حرف، و J منتصف الحرف $[FG]$.

> **انتبه:** انتبه إلى I في هذا المثال: هي منتصف $[BE]$ ، أي منتصف قطر وجه، لا منتصف حرف. وفي الدرس السابق وفي تمارين هذا الدرس تسمّى I منتصف $[EF]$ ، وهو حرف. الرمز نفسه، والنقطة غير النقطة.

المكعّب $ABCDEFGH$ ، و I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$. أثبت أنّ الأشعّة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيّاً.

$$\overrightarrow{EF},\ \overrightarrow{BG},\ \overrightarrow{IJ}$$

1. ① اختيار الشعاعين المرجعيّين مبرهنة 4 تطلب شعاعين غير مرتبطين خطّياً. الكتاب يختار $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ ويبرّر الاستقلال في كلمتين: «لأنّهما متعامدان». التعامد ليس شرط المبرهنة، لكنّه يضمن الاستقلال بيقين. المطلوب إذن كتابة $\overrightarrow{IJ}$ بهما.

2. ② سلسلتان لشعاعٍ واحد نكتب $\overrightarrow{IJ}$ مرّتين بعلاقة شال، مرّةً مروراً بـ E ثمّ F ، ومرّةً مروراً بـ B ثمّ G . كلّ سلسلة تُدخل أحد الشعاعين المرجعيّين.

$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FJ} \qquad \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GJ}$$

3. ③ لماذا الجمع؟ هنا الحيلة I منتصف $[BE]$ ، إذن $\overrightarrow{IE}$ و $\overrightarrow{IB}$ متقابلان ومجموعهما 0 . و J منتصف $[FG]$ ، إذن $\overrightarrow{FJ}$ و $\overrightarrow{GJ}$ متقابلان كذلك. الحدود المزعجة موجودة في السلسلتين بإشارتين متعاكستين، فجمع السلسلتين يمحوها.

$$\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IB}=0 \qquad \overrightarrow{FJ}+\overrightarrow{GJ}=0$$

4. ④ الجمع طرفاً مع طرف نجمع السلسلتين. الطرف الأيسر يصير $2\overrightarrow{IJ}$ ، والطرف الأيمن تسقط منه الأزواج المتقابلة.

$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BG}$$

5. ⑤ القسمة على اثنين والخلاصة وهذه هي بالضبط صيغة مبرهنة 4 مع $a=b=\dfrac{1}{2}$. إذن الأشعّة الثلاثة مرتبطة خطّياً، أي تقع في مستوٍ واحد.

$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

الحيلة تستحقّ اسماً، لأنّ الكتاب يستعملها هنا ثمّ يفترضها في تمرينين من دون أن يسمّيها: عندما تظهر نقطة في منتصف قطعة، اكتب الشعاع مرّتين بسلسلتين تمرّان بطرفَي تلك القطعة، ثمّ اجمع السلسلتين. الحدود المتقابلة تمحو نفسها.

$$2\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BG}$$

لماذا جُمعت السلسلتان بدل أن تُطرحا أو تُستعمل إحداهما وحدها؟

> **كيف أبدأ؟** انظر إلى الحدود التي نريد التخلّص منها، وهي $\overrightarrow{IE}$ و $\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{FJ}$ و $\overrightarrow{GJ}$. اسأل عن كلّ زوج منها: ما مجموعه، وما فرقه؟ العملية التي تُصفّر الأزواج هي المطلوبة.

أ) لأنّ سلسلةً واحدة لا تحوي شعاعاً مرجعيّاً
ب) لأنّ الطرح يعطي صيغةً أقصر
ج) لأنّ الحدود المزعجة تظهر في السلسلتين متقابلةً، فالجمع وحده يمحوها

ج. نعم. $\overrightarrow{IE}=-\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{FJ}=-\overrightarrow{GJ}$ ، والجمع هو العملية التي تُصفّر زوجاً متقابلاً. وثمن ذلك ظهور العامل 2 على اليسار، وهو ثمنٌ زهيد.

ما ينفع فيه هذا كلّه

في آخر الدرس يجيب الكتاب عن سؤال الفائدة بطريقتين لكلّ حالة، هندسيّة وشعاعيّة. الشعاعيّة هي التي تنفع في الفراغ، لأنّ الرسم ثلاثيّ الأبعاد يخدع العين.

كيف نثبت توازي مستقيم ومستوٍ؟

$d \parallel d', \quad d' \subset \mathcal{P}$ هندسيّاً: يكفي إثبات أنّ d يوازي مستقيماً d' من المستوي $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB} = u, \quad A \in \mathcal{P},\ B \in \mathcal{P}$ شعاعيّاً: يكفي إيجاد نقطتين A و B في المستوي $\mathcal{P}$ يكون $\overrightarrow{AB}$ فيهما شعاع توجيه للمستقيم d .

الكتاب، الصفحة 12

كيف نثبت توازي مستويين؟

$d_1 \parallel d_1', \quad d_2 \parallel d_2'$ هندسيّاً: يكفي إثبات أنّ مستقيمين متقاطعين من أحدهما يوازيان مستقيمين متقاطعين من الآخر.

$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'B'}\right) \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{A'C'}\right)$ شعاعيّاً: تأخذ شعاعين غير مرتبطين خطيّاً من الأوّل وشعاعين غير مرتبطين خطيّاً من الثاني، ثمّ تُثبت أنّ كلّ ثلاثيّة من هاتين مرتبطة خطيّاً.

الكتاب، الصفحة 12

انتبه: في الطريقة الثانية تأتي الأشعّة من مستويين مختلفين، لا من واحد. كلّ ثلاثيّة تضمّ شعاعَي التوجيه من المستوي الأوّل وشعاعاً واحداً من الثاني. من أخذ الثلاثة من المستوي نفسه أثبت شيئاً صحيحاً وبلا فائدة: أشعّة مستوٍ واحد مرتبطة خطّياً دائماً.

A و B و C ثلاث نقاط متمايزة من الفراغ. هل الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطّياً؟

> **كيف أبدأ؟** لا تفكّر في الصورة، بل في علاقة شال. اكتب $\overrightarrow{BC}$ بدلالة الشعاعين الآخرين ثمّ قارن ما حصلت عليه بصيغة مبرهنة 4.

أ) لا، لأنّ ثلاثة أشعّة مختلفة لا تقع في مستوٍ واحد عادةً

ب) نعم دائماً، لأنّ $\overrightarrow{BC}$ يُكتب بالشعاعين الآخرين

ج) فقط إذا كانت النّقاط الثلاث على استقامة واحدة

ب. نعم. بعلاقة شال $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ، أي $a = -1$ و $b = 1$. وهذا معقول: ثلاث نقاط تعيّن مستوياً على الأكثر، والأشعّة الثلاثة كلّها فيه.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 10 إلى 13 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.