الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

خواص طويلة عدد عقدي وزاويته

الضرب يجمع الزوايا، والقسمة تطرحها، والجمع لا يفعل شيئاً من هذا

الأعداد العقديّة . الوحدة 4 . الدرس 4

بسيطة

في الدرس السابق تعلّمنا كتابة العدد بطويلته وزاويته. الآن يأتي الربح: احسب $(1-i\sqrt{3})^5$ بالشكل الجبري، وسترى كم من الضرب المتعب ينتظرك. أمّا بالشكل المثلّثي فالجواب يخرج في سطرين، لأنّ الضرب هناك لا يفكّ الأقواس، بل يضرب الطويلات ويجمع الزوايا. هذا الدرس يبني هذه القاعدة، ثمّ يبني أختها في القسمة، ثمّ يحذّرك من العملية الوحيدة التي لا تطيعها: الجمع.

الضرب يجمع الزوايا

لنأخذ عددين غير معدومين، ونكتب كلّاً منهما بشكله المثلّثي: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$، حيث $r=|z|$ و $\theta=\arg z$، وكذلك $r'=|z'|$ و $\theta'=\arg z'$.

نضربهما كما نضرب أيّ قوسين، ثمّ نضع $i^2=-1$ ونرتّب الحدود: الحقيقية معاً والتخيلية معاً.

$$\begin{aligned} z\times z' &= r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \\ &= rr'\left((\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\theta')\right) \end{aligned}$$

انظر إلى القوسين الداخليين. الأوّل هو تماماً $\cos(\theta+\theta')$، والثاني هو $\sin(\theta+\theta')$، وهما دستورا الجمع اللذان تعرفهما من المثلّثات. هنا يظهر سبب هذا الدرس كلّه: الضرب في $\mathbb{C}$ يستدعي دستوري الجمع، فتتحوّل الزوايا من ضرب إلى جمع.

$$z\times z'=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$$

بقيت خطوة صغيرة لا تتخطّاها: هل هذه الكتابة شكل مثلّثي؟ نعم، لأنّ $r>0$ و $r'>0$، فجداؤهما rr' موجب تماماً. ولهذا يحقّ لنا أن نقرأ منه الطويلة والزاوية مباشرة.

مبرهنة 4

$|zz'| = |z| \times |z'|$ طويلة الجداء هي جداء الطويلتين.

$\arg(zz') = \arg z + \arg z' \ (2\pi)$ زاوية الجداء هي مجموع الزاويتين، بمقياس 2π . الشرط: z و z' غير معدومين.

الكتاب، الصفحة 98

مثال الكتاب: ليكن $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ و $z' = 3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. لا نفكّ شيئاً: نضرب 2 في 3 ، ونجمع $\frac{\pi}{5}$ مع $-\frac{\pi}{4}$.

$$\begin{aligned} |zz'| &= 2 \times 3 = 6 \\ \arg(zz') &= \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{20} \\ zz' &= 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{20}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{20}\right)\right) \end{aligned}$$

تذكّر: الطويلات تُضرب، والزوايا تُجمع. لا تخلط بين العمليتين: من يجمع 2 و 3 ليحصل على 5 يكون قد طبّق قاعدة الزوايا على الطويلات.

إذا كانت $|z| = 5$ و $|z'| = 2$ ، فما طويلة الجداء zz' ؟

> **كيف أبدأ؟** قبل أن تحسب، ارجع إلى مبرهنة 4 في فقرة الضرب. فيها سطران، أحدهما عن الطويلة والآخر عن الزاوية، ولكلّ سطرٍ عمليته الخاصّة. اقرأ السطر الذي يخصّ الطويلة وطبّق العملية المكتوبة فيه، لا التي تجاوره.

أ) 10
ب) 7
ج) $\frac{5}{2}$

أ. صحيح. طويلة الجداء جداء الطويلتين، أي 2×5 .

القوى ودستور دوموافر

ماذا لو ضربنا العدد بنفسه؟ نطبّق المبرهنة السابقة على $z \times z$: الطويلة تصير $|z|^2$ والزاوية تصير $2\arg z$. ثمّ نضرب بـ z مرّة ثالثة فنحصل على $|z|^3$ و $3\arg z$ ، وهكذا. الكتاب يثبّت هذا بالتدريج على العدد الطبيعي n .

$$|z^n| = |z|^n$$
$$\arg(z^n) = n \arg z \ (2\pi)$$

وإذا كتبنا العدد بشكله المثلّثي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، صارت النتيجة نفسها بصيغة أوضح للاستعمال:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

وللحالة الخاصّة التي تكون فيها الطويلة تساوي 1 ، أي $r = 1$ ، يبقى الجزء الزاوي وحده. هذه الصيغة تحمل اسماً خاصّاً في الكتاب: دستور دوموافر.

نتيجة 5 ودستور دوموافر

$|z^n| = |z|^n$ الطويلة تُرفع إلى الأس نفسه، والأس n عدد طبيعي.

$\arg(z^n) = n \arg z \ (2\pi)$ الزاوية تُضرب بالأس، لا تُرفع إليه. الشرط: z غير معدوم.

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ دستور دوموافر، أي الحالة $r = 1$.

الكتاب، الصفحة 98

انتبه: الأس يذهب إلى الطويلة، وإلى الزاوية يذهب الضرب. من يكتب $\arg(z^3) = (\arg z)^3$ يكون قد بدّل العمليتين. وكذلك $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ لا تساوي $\cos^n\theta + i\sin^n\theta$: الأس على القوس كلّه، لا على كل حدّ وحده.

إذا كانت $\arg z = \frac{\pi}{6}$ ، فما زاوية z^4 ؟

كيف أبدأ؟ الخيارات الثلاثة تمثّل ثلاث عمليات مختلفة بين 4 و $\frac{\pi}{6}$ ، فالاستحضار السريع من الذاكرة لا يكفي. عد إلى نتيجة 5 فوق السؤال واقرأ السطر الخاصّ بالزاوية وحده، فالسطر الذي يجاوره يخصّ الطويلة وعمليته غير عمليته. ثمّ تحقّق من جوابك هندسياً: الضرب بعدد عقدي دوران، فهل يعقل أن يعود z^4 إلى شعاع z نفسه دائماً؟

أ) $\frac{\pi}{24}$
ب) $\frac{2\pi}{3}$
ج) $\frac{\pi}{6}$

ب. صحيح. $4 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

القسمة تطرح الزوايا

لا يعيد الكتاب الحساب من جديد للقسمة، بل يستعمل حيلة تستحقّ الانتباه: نسمّي الخارج $w = \frac{z}{z'}$ ، فيكون $z = wz'$. صار عندنا جداء، والجداء نعرف قاعدته.

نطبّق مبرهنة 4 على $z = wz'$ ، فنحصل على $|z| = |w| \times |z'|$ وعلى $\arg z = \arg w + \arg z' \ (2\pi)$. يبقى أن نعزل $|w|$ و $\arg w$ ، أي أن نقسم في الأولى ونطرح في الثانية.

مبرهنة 6

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ طويلة الخارج هي خارج الطويلتين، والمقام z' غير معدوم.

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \ (2\pi)$ زاوية الخارج هي فرق الزاويتين، بمقياس 2π . الشرط: z و z' غير معدومين.

$\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w \ (2\pi)$ $\quad$ $\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|}$ الحالة الخاصّة $z = 1$ ، بشرط $w \neq 0$.

الكتاب، الصفحة 99

مثال الكتاب: ليكن $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ و $z' = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. انتبه إلى الإشارتين في الطرح: زاوية المقام سالبة، وطرح السالب جمع.

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{4}{3/2} = \frac{8}{3}$$
$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$$
$$\frac{z}{z'} = \frac{8}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

تذكّر: المقلوب $\frac{1}{w}$ يقلب الطويلة ويعكس الزاوية. لاحظ أنّ زاويته هي زاوية المرافق نفسها، ولذلك يلتقي هذا الدرس بما رأيناه عن $\bar{z}$.

أيّ العبارات الآتية صحيحة دائماً لعددين عقديين غير معدومين؟

كيف أبدأ؟ افحص الخيارات واحداً واحداً بدل أن تبحث عن الصحيح مباشرةً. في كلّ خيارٍ عمليتان، واحدة بين العددين وأخرى بين الطويلتين، فقابِل هذا الزوج بما قاله الدرس عن كلّ عملية على حدة. وتذكّر أنّ كلمة «دائماً» تعني أنّ مثالاً واحداً مضادّاً يكفي لإسقاط العبارة.

أ) $|z + z'| = |z| + |z'|$

ب) $|zz'| = |z| + |z'|$

ج) $|zz'| = |z| \times |z'|$

ج. صحيح. هذه مبرهنة 4، وهي تصلح لأيّ عددين عقديين.

لماذا لا تُجمع الطويلات

حقّق الآن تسير الأمور على ما يُرام: الطويلة تنسجم مع الضرب ومع القسمة. لكنّ الكتاب يقف هنا وقفة تحت عنوان تكريساً للفهم، ليقول ما لا تفعله الطويلة.

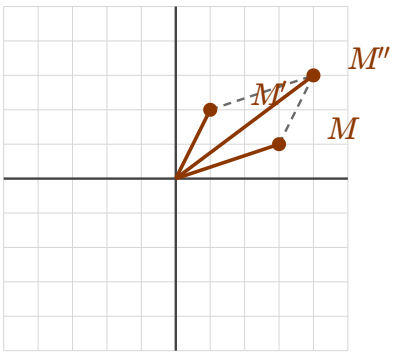
انتبه: طويلة مجموع عددين لا تساوي مجموع الطويلتين. هذه ليست حالة نادرة أو استثناء صغير، بل هي الحال العامّة، والمساواة هي الاستثناء.

الدليل مثال واحد يكفي، وهو مثال الكتاب: خذ z غير معدوم واختر $z' = -z$. المجموع ينعدم، بينما مجموع الطويلتين موجب تماماً.

$$|z + z'| = |z - z| = 0$$
$$|z| + |z'| = 2|z| > 0$$

إذاً ما الذي يبقى صحيحاً؟ يبقى اتّجاه واحد فقط، وله اسم: متراجحة المثلّث. الطويلة قد تكون أصغر، وقد تساوي، لكنّها لا تزيد أبداً.

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$



M صورة z ، و M' صورة z' ، و M'' صورة $z + z'$. الطريق المستقيم OM'' لا يزيد على الطريق المكسور عبر M .

الشكل يقرأ المتراجحة بلغة الهندسة: $OM'' \leq OM + OM'$ ، أي أنّ ضلعاً في مثلّث لا يزيد على مجموع الضلعين الآخرين. من هنا جاء الاسم.

تذكّر: المساواة $|z+z'|=|z|+|z'|$ لا تصير صحيحة إلّا حين يكون للعددين الاتّجاه نفسه، أو حين ينعدم أحدهما، أي حين لا يوجد مثلّث أصلاً بل قطعة واحدة.

انتبه: وفي فقرة أخطاء يجب تجنّبها في آخر الوحدة يقول الكتاب: لا تُستعمل المتراجحات بين أعداد عقدية. العبارة $z<z'$ لا معنى لها في $\mathbb{C}$. ما يُقارن هو الطويلات وحدها، لأنّها أعداد حقيقية موجبة، فتكتب $|z|<|z'|$.

مثال محلول: قوّة وكسر

هذا هو المثال الذي يختم به الكتاب الدرس، وهو تمرين امتحاني نموذجي: المطلوب الشكل الجبري لكلّ من العددين. جرّب أن تتخيّل فكّ $(1-i\sqrt{3})^5$ بالتوزيع، ثمّ تابع الحلّ.

أعطِ الشكل الجبري لكلّ من العددين. القاعدة العامّة: كلّ ما فيه قوّة، حوّله إلى الشكل المثلّثي أوّلاً.

$$z=(1-i\sqrt{3})^5 \qquad w=\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$$

1. نكتب الأساس بشكله المثلّثي نضع $z'=1-i\sqrt{3}$. طويلته $\sqrt{1+3}=2$ ، والشرطان $\cos\theta=\frac{1}{2}$ و $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعطيان $-\frac{\pi}{3}$.

$$z'=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

2. نرفع إلى القوّة الخامسة الطويلة تُرفع إلى 5 ، والزاوية تُضرب بـ 5 . لا فكّ أقواس ولا ضرب كلّ حدّ بكلّ حدّ.

$$z=z'^{5}=2^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

3. نختصر الزاوية ثمّ نقرأ الجزأين الزاوية $-\frac{5\pi}{3}$ نضيف إليها دورة كاملة 2π فتصير $\frac{\pi}{3}$ ، وهي الزاوية نفسها. عندها $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$z=32\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=16+16\sqrt{3}\,i$$

4. نعالج البسط نبدأ بالكسر. طويلة $1+i$ هي $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، فالقوّة الرابعة تضرب الزاوية بـ 4 فتعطي π ، وعند π يكون الجيب معدوماً والكوسينوس -1 .

$$(1+i)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4$$

5. نعالج المقام طويلة $\sqrt{3}+i$ هي 2 وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ، فالقوّة الثالثة تعطي الطويلة 8 والزاوية $\frac{\pi}{2}$ ، وهذه زاوية العدد التخيلي البحت الموجب.

$$(\sqrt{3}+i)^3 = 2^3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i$$

6. نقسم بقيت قسمة بسيطة. نضرب البسط والمقام بـ i للتخلّص من i في المقام، فيصير المقام $8i^2 = -8$.

$$w = \frac{-4}{8i} = \frac{-4i}{8i^2} = \frac{-4i}{-8} = \frac{i}{2}$$

الكتاب يقولها صراحةً: عند حساب القوى يُفضّل استعمال التمثيل المثلّثي. كل أسّ أكبر من 2 هو إشارة لك بأن تترك الشكل الجبري.

$$(r(\cos\theta+i\sin\theta))^n = r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$$

متى تصلح هذه القواعد

قبل أن تغلق الدرس، انتبه إلى شرطين صغيرين يسقطان كثيراً في الامتحان، وكلاهما مكتوب في نصّ المبرهنتين.

الشرط الأوّل: العددان غير معدومين. الطويلة $|0| = 0$ معرّفة تماماً ولا مشكلة فيها، لكن $\arg 0$ غير معرّفة، لأنّ المبدأ لا يحدّد اتّجاهاً. فكل سطر فيه $\arg$ يفترض ضمناً أنّ العدد غير معدوم.

انتبه: الشرط الثاني: القوس (2π) في نهاية كل سطر عن الزاوية جزء من العبارة. $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \ (2\pi)$ لا تعني تساوياً بين عددين، بل بين صنفين. لهذا يحقّ لك أن تضيف أو تطرح دورة كاملة لتُرجع الزاوية إلى مجال مألوف، كما فعلنا في المثال حين صارت $-\frac{5\pi}{3}$ هي $\frac{\pi}{3}$.

وهذه القواعد الأربع مجتمعة، كما مرّت في الدرس. الثلاث الأولى مساواة، والرابعة متراجحة، وهذا الفرق بالذات هو ما يُسأل عنه:

$$\begin{aligned} |zz'| &= |z||z'| & \arg(zz') &= \arg z + \arg z' \ (2\pi) \\ \left|\frac{z}{z'}\right| &= \frac{|z|}{|z'|} & \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &= \arg z - \arg z' \ (2\pi) \\ |z^n| &= |z|^n & \arg(z^n) &= n\arg z \ (2\pi) \\ |z+z'| &\le |z| + |z'| \end{aligned}$$

تذكّر: الفكرة التي تحمل بقيّة الوحدة: الضرب بعدد عقدي هو تكبير بطويلته ودوران بزاويته. الدرس القادم سيكتب هذه الفكرة بصيغة أقصر بعد، هي الشكل الأسّي.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 98 إلى 100 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.