بسيطة

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الشكل الأسّي لعدد عقدي

رمز واحد يختصر القوس المثلّثي، ويجعل الضرب والقوى حساباً على الزوايا

الأعداد العقديّة . الوحدة 4 . الدرس 5

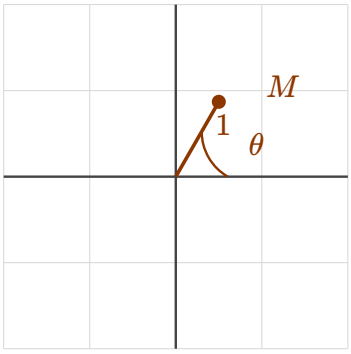
الشكل المثلّثي وصف صحيح، لكنّه طويل: قوس فيه كوسينوس وجيب في كل سطر. في هذا الدرس نلاحظ أنّ هذا القوس يتصرّف تصرّف القوى بالضبط، فنمنحه رمز القوى ونكتبه $e^{i\theta}$. ليس هذا اختصاراً في الكتابة فحسب: بعده يصير الضرب جمعاً في الزوايا، والقسمة طرحاً، والقوّة ضرباً، وتختفي الحسابات الطويلة من الامتحان.

الأعداد التي طويلتها واحد

في الدرس السابق كتبنا كل عدد عقدي غير معدوم بالشكل $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. لنبدأ هنا من أبسط حالة ممكنة: أن تكون الطويلة 1 بالضبط.

إذا كانت $|z| = 1$ فالمعامل أمام القوس يختفي، ولا يبقى من العدد إلّا زاويته، أي $z = \cos\theta + i\sin\theta$. وبالعكس، كل عدد مكتوب بهذه الصيغة طويلته $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$. نجمع هذه الأعداد في مجموعة يُرمز إليها عادةً بالرمز $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{\cos\theta + i\sin\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$$



صور عناصر $\mathbb{U}$ تملأ الدائرة التي مركزها المبدأ ونصف قطرها 1 . البُعد ثابت، والزاوية θ وحدها هي التي تميّز النقطة.

تذكّر: على $\mathbb{U}$ لم يبقَ للعدد إلّا وصف واحد: زاويته. الطويلة معروفة سلفاً وتساوي 1 .

خاصّة تحوّل الجمع إلى ضرب

بما أنّ الزاوية وحدها تعيّن العدد على $\mathbb{U}$ ، صار من الطبيعي أن ننظر إلى التابع الذي يأخذ زاوية ويعطي العدد الموافق لها.

نسمّيه E ، وهو تابع من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{U}$.

$$E(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

لهذا التابع خاصّة واحدة، وهي كل شيء في هذا الدرس:

$$E(\theta + \theta') = E(\theta) \cdot E(\theta')$$

والبرهان ليس أكثر من نشر الجداء ثمّ استعمال صيغتي جمع الزوايا اللتين تعرفهما من المثلّثات:

$$\begin{aligned} E(\theta)\cdot E(\theta') &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta') \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &= E(\theta+\theta') \end{aligned}$$

تذكّر: الجمع في الزوايا صار ضرباً في الأعداد. هذا بالضبط سلوك التابع الأسّي الذي نعرفه في $\mathbb{R}$ ، حيث $e^{a}\cdot e^{b} = e^{a+b}$.

ما قيمة هذا الجداء؟

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot E\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

> **كيف أبدأ؟** الخاصّة الوحيدة للتابع E في هذا الدرس تحوّل جداء قيمتين إلى قيمة واحدة. طبّقها على الزاويتين أوّلاً، ثمّ ارجع إلى تعريف E واقرأ الكوسينوس والجيب عند الزاوية الناتجة.

أ) -1
ب) 1
ج) i

أ. صحيح. الخاصّة تجمع الزاويتين، فنحصل على $E(\pi) = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

من أين جاء الرمز الأسّي

تابع يحوّل الجمع إلى ضرب: هذا هو سلوك التابع الأسّي بعينه، ومن هنا جاءت فكرة الرمز الجديد. لهذا السبب وحده اتّفق الرياضيّون على كتابة $E(\theta)$ بالرمز $e^{i\theta}$. انتبه إلى طبيعة الخطوة: هذه ليست نتيجة نبرهنها، بل اصطلاح على رمز، اختير لأنّه يحفظ القاعدة التي نعرفها.

تعريف 4

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ الرمز $e^{i\theta}$ يدل على العدد العقدي الذي طويلته تساوي الواحد وزاويته θ .

$|e^{i\theta}| = 1$ مباشرة من التعريف: هذه الأعداد كلّها على $\mathbb{U}$ ، مهما كانت θ .

$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ $e^{i\pi} = -1$ قيمتان تُحفظان، وتردان كثيراً في الامتحان.

الكتاب، الصفحة 101

انتبه: الرمز $e^{i\theta}$ ليس عدداً حقيقياً موجباً، ولا يكبر كلّما كبرت θ . طويلته 1 دائماً، فهو يدور على الدائرة ولا يتمدّد. وأوضح دليل على ذلك أنّ $e^{i\pi} = -1$ ، وهي قيمة سالبة.

سؤال الكتاب في هذا الموضع يستحق التوقّف: بما أنّ $i \times 0 = 0$ ، صار للعدد e^0 تعريفان. الأوّل من $\mathbb{R}$ ويعطي $e^0 = 1$ ، والثاني من التعريف الجديد ويعطي $\cos 0 + i\sin 0 = 1$. التعريفان متّفقان، والرمز الجديد لا يناقض القديم.

ما طويلة هذا العدد، أياً كانت θ الحقيقية؟

$$e^{i\theta}$$

كيف أبدأ؟ الرمز اصطلاح على عدد عقدي، لا قوّة لعدد حقيقي، فلا تنقل إليه عادات e^x . فكّ الرمز إلى جزأيه الحقيقي والتخيّلي، ثمّ احسب $\sqrt{a^2+b^2}$ واختصر بالعلاقة المثلّثية الأساسية.

أ) θ
ب) 1
ج) e^{θ}

ب. صحيح. $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ ، فالنقطة على الدائرة دائماً.

الحالة العامّة: كل عدد غير معدوم

الآن نرفع القيد. ليكن z عدداً عقدياً غير معدوم، طويلته $|z|$ وزاويته θ . كتبناه في الدرس السابق $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، والقوس الآن له رمز مختصر:

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

تعريف 5

$z = |z|\, e^{i\theta}$ الشكل الأسّي لعدد عقدي z غير معدوم زاويته θ .

$\theta = \arg z\ (2\pi)$ $r = |z| > 0$ المعامل أمام الرمز هو الطويلة، والأسّ يحمل الزاوية بمقياس 2π .

الكتاب، الصفحة 101

انتبه: الصفر لا شكل أسّي له. طويلته $|0| = 0$ معرّفة تماماً ومسموحة، أمّا $\arg 0$ فلا معنى له، لأنّ المبدأ لا يحدّد اتّجاهاً. لذلك يُشترط في التعريف أن يكون z غير معدوم، وهذا الشرط جزء من التعريف لا تفصيل جانبي.

نأخذ أوّل عدد من مثال الكتاب. المطلوب الانتقال من الشكل الأسّي إلى الشكل الجبري، أي قراءة الجزأين.

$$z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$$

1. نقرأ الطويلة والزاوية المعامل أمام الرمز هو الطويلة، والذي يرافق i في الأسّ هو الزاوية. لا حساب هنا، قراءة فقط.

$$|z_1| = 2 \qquad \arg z_1 = \frac{\pi}{4}$$

2. نفتح الرمز التعريف يقول إنّ $e^{i\theta}$ ليس إلّا $\cos\theta + i\sin\theta$ ، فنعيد كتابة العدد بالشكل المثلّثي.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

3. نعوّض القيمتين المعروفتين $\cos\frac{\pi}{4}$ و $\sin\frac{\pi}{4}$ كلاهما يساوي $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

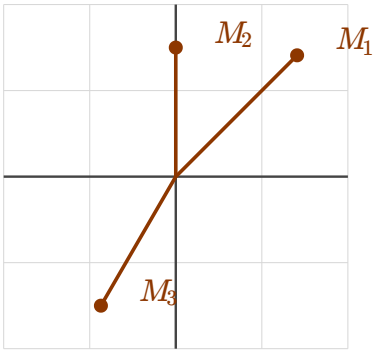
4. نضرب ونرتّب الضرب بـ 2 يبسّط المقام، فيظهر الشكل الجبري نظيفاً.

$$z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

الاتّجاه من الأسّي إلى الجبري لا يحتاج حيلة: افتح الرمز، عوّض القيمتين، اضرب بالطويلة.

$$|z|\,e^{i\theta} = |z|\cos\theta + i\,|z|\sin\theta$$

المثال نفسه يعطي عددين آخرين: $z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_3 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$. وبالطريقة ذاتها نجد $z_2 = \frac{3}{2}i$ و $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$.



صور الأعداد الثلاثة كما في الكتاب. طول القطعة هو المعامل، واتّجاهها هو ما يحمله الأسّ.

لماذا يسهّل الأسّي الحساب

الآن يظهر الربح. اضرب عددين بالشكل الأسّي، فلن تفعل شيئاً غير ضرب المعاملين وجمع الأسّين، تماماً كقواعد القوى التي تعرفها منذ سنوات.

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'\,e^{i(\theta+\theta')}$$

والبرهان جاهز مما سبق: المعاملان يُضربان لأنّ طويلة الجداء جداء الطويلتين، والزاويتان تُجمعان لأنّ $E(\theta)E(\theta') = E(\theta+\theta')$.

مبرهنة 7

$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'\,e^{i(\theta+\theta')}$ من أجل r و r' موجبين تماماً: الطويلتان تُضربان، الزاويتان تُجمعان.

$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$ المرافق يقلب إشارة الزاوية ولا يمسّ الطويلة.

$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}\,e^{i(\theta-\theta')}$ القسمة تقسم الطويلتين وتطرح الزاويتين.

$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow (r = r'\ ,\ \theta = \theta'\ (2\pi))$ شرط التساوي. لاحظ القوس: الزاويتان متساويتان بمقياس 2π ، لا بالضبط.

الكتاب، الصفحة 102

انتبه: لا تُهمل القوس (2π) في شرط التساوي. العددان $e^{i\cdot 0}$ و $e^{i2\pi}$ متساويان تماماً مع أنّ $0 \neq 2\pi$. الزاوية صنف كامل من القيم، لا قيمة واحدة، ومن قرأ السطر كمعادلة عادية أضاع نصف الحلول.

من المثال نفسه، وقد صار لدينا $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ و $z_2 = \frac{3}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$ و $z_3 = \sqrt{3}\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ ، المطلوب حساب ثلاثة مقادير بالشكل الأسّي.

$$z_1 z_2 \qquad \frac{z_1}{z_2} \qquad (z_3)^5$$

1. الجداء نضرب المعاملين 2 و $\frac{3}{2}$ فنحصل على 3 ، ونجمع الزاويتين $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{\pi}{2}$ فنحصل على $\frac{3\pi}{4}$.

$$z_1 z_2 = 2 \times \frac{3}{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)} = 3e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

2. القسمة نقسم المعاملين ونطرح الزاويتين. القسمة 2 على $\frac{3}{2}$ تعطي $\frac{4}{3}$ ، والطرح يعطي $-\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\frac{3}{2}}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{4}{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

3. القوّة القوّة ترفع المعامل وتضرب الزاوية بالأسّ. لاحظ أنّ $(\sqrt{3})^5 = 9\sqrt{3}$.

$$(z_3)^5 = (\sqrt{3})^5 \left(e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)^5 = 9\sqrt{3}\, e^{-i\frac{10\pi}{3}}$$

4. نردّ الزاوية إلى مجال مألوف إضافة دورتين كاملتين، أي 4π ، لا تغيّر العدد. و $-\frac{10\pi}{3} + 4\pi = \frac{2\pi}{3}$ ، وهذه هي صيغة الكتاب.

$$(z_3)^5 = 9\sqrt{3}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

الضرب يجمع الزوايا، القسمة تطرحها، والقوّة تضربها بالأسّ. هذه كل قواعد الحساب في هذا الدرس.

$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

ما قيمة هذا الجداء بالشكل الأسّي؟

$$3e^{i\frac{\pi}{6}} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

> **كيف أبدأ؟** الأجوبة الثلاثة لا تختلف إلّا في أمرين: ما الذي يحدث للمعاملين وما الذي يحدث للزاويتين. اقرأ السطر الأوّل من مبرهنة 7 وحدّد الفعلين، ثمّ نفّذهما بعناية على الكسرين.

أ) $5e^{i\frac{\pi}{2}}$

ب) $6e^{i\frac{\pi}{18}}$

ج) $6e^{i\frac{\pi}{2}}$

ج. صحيح. $3 \times 2 = 6$ للمعامل، و $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ للزاوية.

دستور دوموافر وعلاقتا أويلر

من قاعدة الضرب وحدها تخرج نتيجتان مشهورتان. الأولى تأتي من تكرار الضرب n مرّة إذا كان n موجباً، ومن قاعدة القسمة $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ إذا كان n سالباً. والثانية تأتي من جمع $e^{i\theta}$ مع $e^{-i\theta}$ ثمّ طرحهما.

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta) = 2\cos\theta$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta) = 2i\sin\theta$$

يكفي أن نقسم السطر الأوّل على 2 والثاني على $2i$ لنصل إلى ما يسمّيه الكتاب علاقتَي أويلر.

نتيجة 8

$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$ دستور دوموافر، من أجل θ حقيقي و n صحيح، سالباً كان أو موجباً.

$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ علاقة أويلر الأولى: المجموع يحذف الجزأين التخيليّين.

$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ علاقة أويلر الثانية. المقام $2i$ ، لا 2 ، وهذا هو موضع الخطأ الشائع.

الكتاب، الصفحة 102

انتبه: في علاقة الجيب المقام $2i$ وليس 2 . من ينساه يحصل على عدد تخيّلي بحت في مكان عدد حقيقي، ويكتشف الخطأ متأخّراً بعد سطور من الحساب.

تذكّر: دستور دوموافر هو الذي يجعل رفع عدد عقدي إلى قوّة عالية سطرين اثنين، بدل نشر طويل يمتلئ بحدود i^2 و i^3 .

انتبه: متى لا تكون الكتابة أسّية

نختم بمثال الكتاب الثاني. هو أصعب قليلاً، لا لأنّ الحساب فيه أطول، بل لأنّ الجواب معلّق بشرط لا بدّ من التحقّق منه قبل إعلانه.

لتكن θ عدداً من المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. المطلوب إعطاء الشكل الأسّي للعدد العقدي الآتي.

$$z = 1 + e^{2i\theta}$$

1. نفتح الرمز التعريف يفكّ $e^{2i\theta}$ إلى جزأيه، والزاوية هنا 2θ لا θ .

$$z = 1 + \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

2. نستعمل صيغتي الضعف من المثلّثات: $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$ و $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$.

$$z = 2\cos^2\theta + i\,(2\sin\theta\cos\theta)$$

3. نخرج العامل المشترك العامل $2\cos\theta$ موجود في الحدّين، وما يبقى داخل القوس هو الشكل المثلّثي نفسه.

$$z = 2\cos\theta\,(\cos\theta + i\sin\theta) = (2\cos\theta)e^{i\theta}$$

4. نتحقّق من الشرط هذه الكتابة لا تكون شكلاً أسّياً إلّا إذا كان المعامل موجباً تماماً. وعلى المجال المعطى $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ يكون $\cos\theta > 0$ ، فالشرط محقّق والجواب مقبول.

$$|z| = 2\cos\theta \qquad \arg z = \theta\ (2\pi)$$

قبل أن تعلن أنّك وصلت إلى الشكل الأسّي، انظر إلى المعامل: هل هو موجب تماماً؟

$$z = (2\cos\theta)e^{i\theta} \qquad \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

انتبه: الشرط معلّق بإشارة $\cos\theta$ ، لا بعضوية θ في هذا المجال. فالتابع $\cos$ دوريّ، وقد تخرج θ عن المجال ويبقى $\cos\theta$ موجباً، كما عند $\theta = 2\pi$ حيث $\cos\theta = 1$. فإذا كان $\cos\theta$ سالباً، كما في المجال $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$ ، فالكتابة $(2\cos\theta)e^{i\theta}$ ليست شكلاً أسّياً، وتنتقل الإشارة إلى الزاوية فنكتب $z = (-2\cos\theta)e^{i(\theta+\pi)}$ ، تماماً كما في الشكل المثلّثي. وإذا كان $\cos\theta = 0$ ، أي $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، فإنّ $z = 0$ ، فلا شكل أسّي له أصلاً ولا زاوية. المجال المذكور في نص المسألة ليس زينة، بل هو الذي يضمن $\cos\theta > 0$ فيجعل الجواب صحيحاً.

تذكّر: الشكل الأسّي ليس رمزاً أقصر فحسب. هو الذي يحوّل الضرب والقسمة والقوى إلى جمع وطرح وضرب في الزوايا، وعليه ستبنى المسائل التي تأتي بعد هذه الوحدة.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 101 إلى 103 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.