الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الشكل المثلّثي لعدد عقدي

العدد نفسه، مكتوباً بالبُعد والزاوية بدل الجزأين

الأعداد العقديّة . الوحدة 4 . الدرس 3

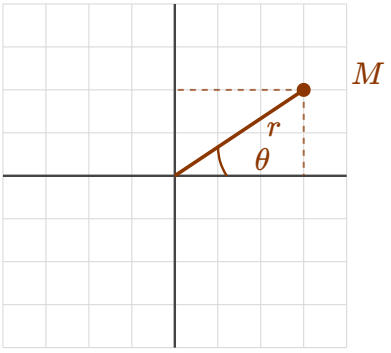
بسيطة

حتى الآن وصفنا العدد العقدي بقطعتيه: كم يمينا وكم فوق. لكن للنقطة وصفاً ثانياً لا يقلّ دقّة: كم تبعد عن المبدأ، وفي أي اتّجاه. هذا الوصف الثاني هو الشكل المثلّثي، وهو الذي سيجعل الضرب والقوى سهلين لاحقاً.

من الإحداثيّات إلى الزاوية

من هذه الفقرة فصاعداً نزوّد المستوي بمعلم متجانس $(O; u, v)$ ، حيث $\overrightarrow{OI} = u$ و $\overrightarrow{OJ} = v$.

لتكن M صورة العدد $z = a + ib$. إذا كانت M مختلفة عن المبدأ O ، فلها إحداثيّتان قطبيّتان $(r\,;\,\theta)$: البُعد عن المبدأ، والزاوية مع الاتّجاه الموجب.



البُعد $r = OM$ والزاوية $\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ تحدّدان النقطة تماماً.

البُعد هو الطويلة التي نعرفها، والزاوية تُقاس بالراديان من محور الفواصل.

$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$\theta = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$$

تذكّر: المبدأ O وحده لا زاوية له، لأنّه لا يحدّد اتّجاهاً. لذلك يُشترط دائماً أن يكون z غير معدوم.

الشكل المثلّثي

من مثلّث قائم بسيط في الشكل السابق نقرأ الجزأين بدلالة r و θ : الضلع الأفقي $a = r\cos\theta$ والضلع الشاقولي $b = r\sin\theta$.

نعوّض هذين في $z = a + ib$ ونخرج المشترك r ، فنحصل على الصيغة التي تحمل اسم هذا الدرس:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

تعريف 3

$\theta = \arg z = (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ زاوية العدد العقدي، بالراديان. تُعرّف فقط عندما يكون z غير معدوم.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ الشكل المثلّثي.

$\arg z = \theta\ (2\pi)$ $r = |z|$ الطويلة هي البُعد، والزاوية معرّفة بمقياس 2π .

الكتاب، الصفحة 95

انتبه: الكتابة $\theta = \varphi\ (2\pi)$ ليست معادلة تعطي عدداً واحداً. معناها $\theta = \varphi + 2\pi k$ حيث k عدد من $\mathbb{Z}$. الزاوية صنف كامل من القيم، لا قيمة واحدة، والقوس جزء من العبارة لا زينة.

الانتقال بين الشكلين

الاتّجاه الأوّل سهل: إذا عرفت r و θ ، فالجزآن يخرجان مباشرة.

$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

الاتّجاه المعاكس يحتاج انتباهاً. الطويلة تخرج بفيثاغورس، أمّا الزاوية فلا يكفي شرط واحد لتعيينها.

نتيجة 3

$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ الطويلة من الجزأين.

$$\cos\theta = \frac{a}{r}$$
$$\sin\theta = \frac{b}{r}$$

الشرطان معاً يعيّنان الزاوية.

الكتاب، الصفحة 95

انتبه: الشرطان معاً، لا واحد منهما. الكوسينوس وحده يترك زاويتين ممكنتين، إحداهما فوق المحور والأخرى تحته، والجيب هو الذي يفصل بينهما. من يكتفي بالكوسينوس يقع في نصف الحالات على الزاوية الخطأ.

نأخذ المثال كما هو في الكتاب: المطلوب كتابة هذا العدد بالشكل المثلّثي، أي تعيين طويلته وزاويته.

$$z_1 = \sqrt{3} + i$$

1. نقرأ الجزأين العدد مكتوب بالشكل الجبري $a + ib$ ، فالجزء الحقيقي $a = \sqrt{3}$ والجزء التخيلي $b = 1$.

$$a = \sqrt{3} \qquad b = 1$$

2. نحسب الطويلة بفيثاغورس من الضلعين. لاحظ أنّ $(\sqrt{3})^2$ تساوي 3 ببساطة.

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

3. نكتب الشرطين معاً نقسم كل جزء على الطويلة. الشرطان معاً هما اللذان يعيّنان الزاوية، لا أحدهما.

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{2}$$

4. نقرأ الزاوية الكوسينوس موجب والجيب موجب، فالزاوية في الربع الأوّل. القيمة التي تحقّق الشرطين معاً هي $\frac{\pi}{6}$.

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

5. نكتب الشكل المثلّثي نضع الطويلة والزاوية في الصيغة. هذا هو العدد نفسه، مكتوباً بلغة أخرى.

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

الترتيب دائماً واحد: الطويلة أوّلاً، ثمّ الشرطان معاً، ثمّ اقرأ الزاوية منهما.

$$z = |z|\,(\cos(\arg z) + i\sin(\arg z))$$

ما طويلة هذا العدد وما زاويته؟

$$z = 1 - i$$

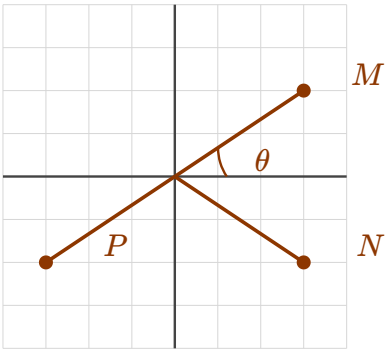
كيف أبدأ؟ اتبع ترتيب المثال المحلول أعلاه: الطويلة أوّلاً، ثمّ الشرطان $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$ و $\sin\theta = \dfrac{b}{r}$ معاً لا أحدهما.
وانتبه أنّ الطويلة جذر مجموع المربّعين لا المجموع نفسه، ثمّ اسأل: أيّ زاويةٍ تحقّق الشرطين معاً؟

أ) $r = \sqrt{2}\,,\ \theta = -\frac{\pi}{4}$
ب) $r = \sqrt{2}\,,\ \theta = \frac{\pi}{4}$
ج) $r = 2\,,\ \theta = -\frac{\pi}{4}$

أ. صحيح. $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ، والشرطان $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ يعطيان $-\frac{\pi}{4}$.

زاوية المرافق والمعاكس

من الشكل المثلّثي تخرج زاويتان أخريان بلا حساب. المرافق ينعكس تحت المحور، فزاويته معاكسة. والمعاكس يقع في الجهة المقابلة تماماً، فزاويته تزيد بنصف دورة.



M صورة z ، و N صورة $\bar{z}$ ، و P صورة $-z$. البُعد عن المبدأ واحد في الثلاثة.

زوايا المرافق والمعاكس

$\arg \bar{z} = -\arg z \ (2\pi)$ الانعكاس حول محور الفواصل يقلب إشارة الزاوية.

$\arg(-z) = \pi + \arg z \ (2\pi)$ المعاكس يضيف نصف دورة.

الكتاب، الصفحة 95

إذا كانت $\arg z = \frac{\pi}{3}$ ، فما زاوية مرافقه؟

> **كيف أبدأ؟** ارجع إلى الشكل في هذه الفقرة وميّز بين تحويلين يسهل خلطهما: انعكاسٌ حول محور الفواصل، وانتقالٌ إلى الجهة المقابلة من المبدأ. اسأل أوّلاً أيّهما يعطي المرافق، ثمّ اقرأ في السطر الموافق من القاعدة أعلاه أثره في الزاوية.

أ) $\pi + \frac{\pi}{3}$

ب) $-\frac{\pi}{3}$

ج) $\frac{\pi}{3}$

ب. صحيح. المرافق انعكاس حول محور الفواصل، فالزاوية تنقلب إشارتها.

انتبه: متى لا تكون الكتابة مثلّثية

الصيغة $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ لا تكون شكلاً مثلّثياً إلّا بشرط واحد: أن يكون r موجباً تماماً. فهو طويلة، والطويلة مسافة.

خذ مثال الكتاب $z = -2(\cos\theta + i\sin\theta)$. المعامل سالب، فهذه ليست الصيغة المطلوبة. نُدخل الإشارة في الزاوية بدل أن نتركها أمام القوس:

$$\begin{aligned} z &= 2(-\cos\theta - i\sin\theta) \\ &= 2\left(\cos(\theta+\pi) + i\sin(\theta+\pi)\right) \end{aligned}$$

وعندها نقرأ الطويلة والزاوية بأمان:

$$\begin{aligned} |z| &= 2 \\ \arg z &= \theta + \pi \ (2\pi) \end{aligned}$$

انتبه: الإشارة السالبة لا تدخل في الطويلة أبداً. هي تنتقل إلى الزاوية بإضافة π . من يكتب $|z| = -2$ يكتب مسافة سالبة.

ما طويلة هذا العدد؟

$$z = -3\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$$

> **كيف أبدأ؟** لا تقرأ الطويلة من المعامل الظاهر أمام القوس قبل فحص واحد: ما الشرط الذي تفرضه الصيغة على هذا المعامل حتى تكون الكتابة شكلاً مثلّثياً؟ إن لم يتحقّق الشرط، فانظر ماذا فعلت الفقرة أعلاه بالإشارة قبل أن تقرأ.

أ) -3

ب) لا يمكن تعيينها

ج) 3

ج. صحيح. الطويلة مسافة فهي موجبة، والإشارة تنتقل إلى الزاوية فتصير $\pi + \frac{\pi}{5}$.

خواص تُسأل في الامتحان

الزاوية تعطي شرطاً سريعاً لتمييز نوع العدد، وهو يُسأل كثيراً. عدد يقع على محور الفواصل حقيقي، وعلى محور التراتيب تخيّلي بحت.

خواص الزاوية

$\arg z = 0\ (2\pi)$ العدد حقيقي موجب. يقع على الجزء الموجب من محور الفواصل.

$\arg z = \pi\ (2\pi)$ العدد حقيقي سالب. أيّ من الشرطين يكفي ليكون z حقيقياً، بشرط أن يكون غير معدوم.

$\arg z = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ العدد تخيّلي بحت وجزؤه التخيلي موجب.

$\arg z = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ العدد تخيّلي بحت وجزؤه التخيلي سالب.

الكتاب، الصفحة 96

انتبه: لا تكتفِ بـ $\arg z = 0$ للحكم بأنّ العدد حقيقي. الأعداد الحقيقية السالبة زاويتها π ، وهي حقيقية تماماً. والشرط كلّه يسقط إذا كان z معدوماً، لأنّ زاويته غير معرّفة أصلاً.

تذكّر: الشكل المثلّثي ليس زينة. سنراه في الدرس القادم يجعل الضرب والقوى أسهل بكثير من الشكل الجبري.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 95 إلى 97 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.