الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

مرافق عدد عقدي

العدد التوأم الذي يجعل المقام حقيقياً

الأعداد العقديّة . الوحدة 4 . الدرس 2

بسيطة

في الدرس السابق استعملنا حيلة عند القسمة: نضرب البسط والمقام بعدد يشبه المقام مع قلب إشارة واحدة. ذلك العدد له اسم، وله قواعد، وهو أكثر أداة ستستعملها في هذه الوحدة. اسمه المرافق.

ما هو المرافق

خذ عدداً عقدياً $z = a + ib$. مرافقه هو العدد نفسه مع قلب إشارة الجزء التخيلي وحده. الجزء الحقيقي لا يتغيّر.

نرمز للمرافق بخطّ فوق الحرف، فنكتب $\bar{z}$ ونقرؤها: مرافق z .

$$\bar{z} = a - ib$$

ثلاثة أمثلة من الكتاب تكفي لتثبيت الفكرة: مرافق $1 + i$ هو $1 - i$ ، ومرافق 3 هو 3 نفسه، ومرافق $-2i$ هو $2i$.

تذكّر: العدد الحقيقي مرافقه نفسه، لأنّ جزأه التخيلي صفر ولا شيء ينقلب.

ما مرافق هذا العدد؟

$$z = -5 + 4i$$

كيف أبدأ؟ سمِّ أوّلاً الجزء الحقيقي والجزء التخيلي في $z = -5 + 4i$ ، فالأجوبة الثلاثة تختلف في الإشارتين لا في العددين. ثمّ ارجع إلى صيغة $\bar{z}$ في أوّل الدرس واقرأ أيّ الإشارتين وحدها تنقلب.

أ) $5 - 4i$

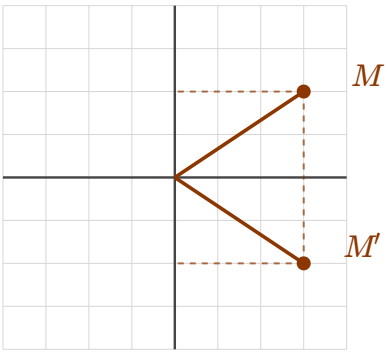
ب) $5 + 4i$

ج) $-5 - 4i$

ج. صحيح. الجزء التخيلي وحده انقلبت إشارته، والجزء الحقيقي بقي -5 .

المرافق في المستوي

الفكرة تصير أوضح على الورقة. إذا كانت M صورة العدد z ، فصورة مرافقه M' تقع تحتها تماماً، على البعد نفسه من محور الفواصل.



صورة $z = 3 + 2i$ وصورة مرافقه $\bar{z} = 3 - 2i$ ، متناظرتان بالنسبة إلى محور الفواصل.

بعبارة الهندسة: M' هي نظيرة M بالنسبة إلى محور الفواصل. والانعكاس لا يغيّر المسافة إلى المبدأ، فالقطعتان OM و OM' متساويتان.

$$|z| = |\bar{z}|$$

تذكّر: المرافق يغيّر مكان النقطة، لا بعدها عن المبدأ. لذلك الطويلة واحدة للعددين.

نتائج مباشرة

من التعريف وحده تخرج عدّة نتائج، وكلّها تُستعمل لاحقاً. أوّلها أنّ المرافق عملية تعود على نفسها: إذا رافقت مرّتين، عدت إلى حيث بدأت.

$$\overline{(\bar{z})} = z$$

وإذا جمعت العدد مع مرافقه، حذف الجزآن التخيليان بعضهما وبقي ضعف الجزء الحقيقي. وإذا طرحت، حذف الجزآن الحقيقيان وبقي ضعف الجزء التخيلي.

$$z + \bar{z} = 2a$$
$$z - \bar{z} = 2i\,b$$

من هاتين نستخرج الجزأين بلا حاجة إلى فتح الكتابة الجبرية:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$$
$$\mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

والنتيجة الأهمّ للحساب: عدد مضروب بمرافقه يعطي مربّع الطويلة، وهو عدد حقيقي موجب. هذه هي بالضبط الحيلة التي جعلت المقام حقيقياً في الدرس السابق.

$$z\,\bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

نتائج مباشرة

$\overline{(\bar{z})} = z$ المرافق عملية تعود على نفسها.

$z - \bar{z} = 2i\,b$ $z + \bar{z} = 2a$ الجمع يُبقي الحقيقي، والطرح يُبقي التخيلي.

$\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ استخراج الجزأين من العدد ومرافقه.

$z = \bar{z}$ شرط لازم وكافٍ لكون z عدداً حقيقياً.

$\bar{z} = -z$ شرط لازم وكافٍ لكون z عدداً تخيّلياً بحتاً.

$z\,\bar{z} = |z|^2$ العلاقة الأساسية. النتيجة حقيقية دائماً.

الكتاب، الصفحة 93

احسب هذا الجداء دون فتح القوسين:

$$z = 5 - 12i \qquad z\,\bar{z}$$

> **كيف أبدأ؟** السؤال يمنع فتح القوسين عمداً، وهذه إشارة إلى سطرٍ بعينه في صندوق «نتائج مباشرة»: السطر الذي يربط $z\,\bar{z}$ بالطويلة. اقرأه بدقّة واسأل نفسك: أيعطي الطويلة أم مربّعها؟

أ) 169

ب) -119

ج) 13

أ. صحيح. $z\,\bar{z} = |z|^2 = 5^2 + 12^2 = 169$ ، بلا فتح قوسين.

المرافق يمرّ عبر العمليات

السؤال الطبيعي: إذا رافقنا مجموعاً أو جداءً، هل نستطيع أن نرافق كل جزء على حدة؟ الجواب نعم، وهذا ما يجعل المرافق أداة عملية.

مبرهنة 1

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ مرافق مجموع عددين يساوي مجموع مرافقيهما.

$\overline{z\,w} = \bar{z} \times \bar{w}$ مرافق جداء عددين يساوي جداء مرافقيهما.

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ مرافق خارج قسمة، بشرط $w \neq 0$.

$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ وللقوى أيضاً، بشرط n طبيعي غير معدوم.

الكتاب، الصفحة 93

انتبه: المرافقة تطال كل شيء في المقدار: كل عامل وكل ثابت. إذا ظهر i في ثابت، فهو ينقلب هو أيضاً. مثلاً مرافق $2i\,z$ هو $-2i\,\bar{z}$ لا ، $2i\,\bar{z}$.

اكتب مرافق هذا المقدار بدلالة $\bar{z}$:

$$Z = 3z + 2i$$

> **كيف أبدأ؟** ابدأ بالجمع: مبرهنة 1 تسمح بمرافقة كلّ حدٍّ وحده، فاكتب المقدار حدّين واشتغل على كلٍّ منهما منفصلاً. ثمّ عُد إلى التنبيه الذي يسبق السؤال مباشرةً، فهو يجيب عن مصير المعاملات والثوابت.

أ) $3\bar{z} + 2i$

ب) $3\bar{z} - 2i$

ج) $-3\bar{z} - 2i$

ب. صحيح. المرافقة تمرّ عبر الجمع، والثابت $2i$ ينقلب هو أيضاً.

لماذا نحتاجه أصلاً

الكتاب يجيب عن هذا السؤال بجوابين. الأوّل أنّ $z\,\bar{z}$ عدد حقيقي، ولذلك يفيد في حساب الشكل الجبري لخارج قسمة. والثاني أنّه يعطي شرطاً لازماً وكافياً ليكون عدد ما حقيقياً أو تخيّلياً بحتاً.

> **تذكّر:** كلّما رأيت مقاماً عقدياً، اضرب البسط والمقام بمرافق المقام. هذه جملة واحدة تحلّ كل مسائل القسمة في الوحدة.

نأخذ المثال كما هو في الكتاب. المطلوب كتابة هذا العدد بالشكل الجبري، أي على صورة $a + ib$ بعددين حقيقيين.

$$z_1 = \frac{2 - i}{3 + 2i}$$

1. نحدّد مرافق المقام المقام هو $3 + 2i$ ، فمرافقه $3 - 2i$. به سنضرب البسط والمقام معاً، وضرب الطرفين بالعدد نفسه لا يغيّر قيمة الكسر.

$$\overline{3 + 2i} = 3 - 2i$$

2. نضرب الطرفين بالمرافق المقام يصير $z\,\bar{z}$ ، أي مربّع الطويلة، وهو عدد حقيقي. هنا $3^2 + 2^2 = 13$.

$$z_1 = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{(2 - i)(3 - 2i)}{13}$$

3. نفتح البسط نفتح القوسين كالمعتاد، ثمّ نبدّل i^2 بـ -1 . الحدّان الأوسطان لا يحذفان بعضهما هنا، لأنّ البسط والمقام ليسا مترافقين.

$$\begin{aligned}(2-i)(3-2i) &= 6-4i-3i+2i^2 \\ &= 6-7i-2 \\ &= 4-7i\end{aligned}$$

4. نقسم كل حدّ على المقام صار المقام عدداً حقيقياً، فنقسم عليه كل حدّ من البسط على حدة، ونحصل على الشكل الجبري.

$$z_1 = \frac{4-7i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{7}{13}\,i$$

الخطوة الوحيدة التي تحتاج حفظاً هي الأولى: اضرب بمرافق المقام. كل ما بعدها حساب معتاد.

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\bar{w}}{w\,\bar{w}} = \frac{z\,\bar{w}}{|w|^2}$$

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 93 إلى 94 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.