الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التابع الأسّي النيبري

تابعٌ يُعرَّف بالعكس: هو ما يردّ ما فعله اللّوغاريتم

التابع الأسّي . الوحدة 6 . الدرس 1

الوحدة السابقة عرّفت تابع اللّوغاريتم النيبري بأنّه التابع الوحيد على (]left]0, +infty ight[) الذي مشتقّه ({x}{1}rac) والذي ينعدم عند (1). هذا الدرس لا يبني شيئاً جديداً: يأخذ ما بُني ويقلبه. التابع الأسّي هو العمليّة التي تردّ ما فعله اللّوغاريتم، لا أكثر. ولهذا يبدو الدرس قصيراً، وفيه فخّان يستحقّان الانتباه: مساواةٌ تبدو متناظرة وليست كذلك، وشرطُ وجودٍ يختفي في هذا الدرس ثمّ يعود فجأةً في التمارين. أمّا الخطّ البياني للتابع الأسّي فلن ترسمه نقطةً نقطة، إذ يكفي أن تطوي الخطّ البياني للّوغاريتم على منصّف الربع الأوّل.

تعريفٌ بالوصف لا بالبناء

لاحظ أوّلاً ما يفعله الكتاب هنا، فهو غير معتاد. لا يعطيك قاعدةً لحساب $\exp(x)$ ، ولا متسلسلةً، ولا تكاملاً. يقول ببساطة: صورة العدد x هي العدد الذي لوغاريتمه النيبري يساوي x . هذا تعريفٌ بالوصف، وهو مشروعٌ لسببٍ واحدٍ فقط: الوحدة السابقة أثبتت أنّ لكلّ عددٍ حقيقيّ x عدداً موجباً تماماً وحيداً لوغاريتمه x . الوحدانيّة هي ما يحوّل الوصف إلى تعريف. لولاها لكان الكلام بلا معنى.

تعريف 1

التابع الأسّي النيبري، ورمزه $\exp$ ، معرّفٌ على $\mathbb{R}$ كلّه، وقيمه موجبةٌ تماماً. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$

هذا نصّ التعريف حرفيّاً: صورة x هي العدد الذي لوغاريتمه النيبري يساوي x . $\ln\big(\exp(x)\big) = x$

ولمّا كان e^x هو العدد الذي لوغاريتمه x ، كانت الكتابتان لشيءٍ واحد. $\exp(x) = e^x$

الكتاب، الصفحة 165

السطر الأخير تسميةٌ لا برهان. الرمز e^x وُضع في الوحدة السابقة اصطلاحاً على الصفحة 144 ، والكتاب يرفعه هنا إلى رتبة تابع. وهناك سؤالٌ لا يُطرح في هذا الدرس: لماذا تتّفق هذه الكتابة مع القوّة العاديّة حين يكون الأُسّ عدداً صحيحاً، أي لماذا e^3 هو فعلاً $e \times e \times e$ ؟ الوحدة السابقة طرحت السؤال وتركته بعبارة (لماذا؟)، وهذا الدرس لا يعود إليه.

تذكّر: الجواب موجود، لكنّه في الدرس التالي: القاعدة $(e^a)^p = e^{pa}$ عند p صحيح، إذا وُضع فيها $a = 1$ ، أعطت e^p بوصفه القوّة p للعدد e . الحلقة تُغلق هناك، والكتاب لا يقول ذلك أيضاً.

الاتّجاهان، وما ليس متناظراً بينهما

الوحدة السابقة أعطتنا أنّ e^m هو الحلّ الوحيد للمعادلة $\ln x = m$. فلنقرأ ذلك في الاتّجاهين. أوّلاً: إذا كان x موجباً تماماً وكان $\ln x = y$ ، فإنّ x هو العدد الذي لوغاريتمه y ، أي $x = e^y$.

$$\ln x = y \Rightarrow x = e^y$$

تذكّر: الكتاب يقدّم هنا الرمز $\Rightarrow$ بوصفه أوّل لقاءٍ به، وأنت التقيته قبل ذلك في الوحدة السابقة. وهو رمز الاقتضاء: $A \Rightarrow B$ يعني أنّ صحّة الخاصّة A تقتضي صحّة الخاصّة B . سهمٌ في اتّجاهٍ واحد، فلا يُقرأ بالمقلوب. سنحتاج الاتّجاه الآخر، ولذلك سنبرهنه على حدة.

وثانياً في الاتّجاه المعاكس: إذا كان $x = e^y$ ، أخذنا اللّوغاريتم النيبري للطرفين، فحصلنا على $\ln x = \ln\left(e^y\right)$ ، وهذا يساوي y بحسب التعريف.

$$x = e^y \Rightarrow \ln x = y$$

انتبه: الكتاب يضع فوق هذا السطر الشرط «مهما كان $y > 0$ »، وهو خطأٌ مطبعيّ يجب أن تعرفه. في هذا السطر y هو الأُسّ، والأُسّ يجول في $\mathbb{R}$ كلّه؛ الذي يجب أن يكون موجباً تماماً هو x . والدليل من الكتاب نفسه: الصفحة 188 تنصّ صراحةً على أنّ $\ln\left(e^x\right) = x$ أيّاً كان x من $\mathbb{R}$. الخطأ موروثٌ من طبعة 2021 بالنصّ نفسه، فلا تظنّه خطأ مطبعةٍ جديداً.

واجتماع السطرين يعني أنّ العلاقتين $\ln x = y$ و $x = e^y$ متكافئتان: صحّة أيٍّ منهما تقتضي صحّة الأخرى. لكن قبل أن تطويَ الصفحة، انظر إلى الشرطين لا إلى السهمين.

تذكّر: الكتابتان ليستا متناظرتين، وهذا أهمّ سطرٍ في الدرس كلّه. $\ln\left(e^y\right) = y$ صحيحةٌ عند كلّ y حقيقيّ، لأنّ e^y موجبٌ تماماً دائماً فيجد اللّوغاريتم ما يعمل عليه. أمّا $e^{\ln x} = x$ فتحتاج $x > 0$ ، وإلّا لم يكن $\ln x$ موجوداً أصلاً. الكتاب يذكر الاثنتين في صفحةٍ واحدة، لكن في بندين متتاليين وبشرطين مختلفين، ولا يقابل بينهما في نصّ الدرس. المقابلة تأتي متأخّرةً جدّاً، في مراجعة الوحدة على الصفحة (188).

$$\ln\left(e^{y}\right)=y \quad (y\in\mathbb{R}) \qquad e^{\ln x}=x \quad (x>0)$$

أيّ الكتابتين صحيحةٌ عند كلّ عددٍ حقيقيّ t بلا أيّ شرطٍ إضافيّ؟

أ) $e^{\ln t}=t$

ب) $\ln\left(e^{t}\right)=t$

ج) $\ln\left(e^{t}\right)=t$ ، لكن عند $t>0$ وحدها

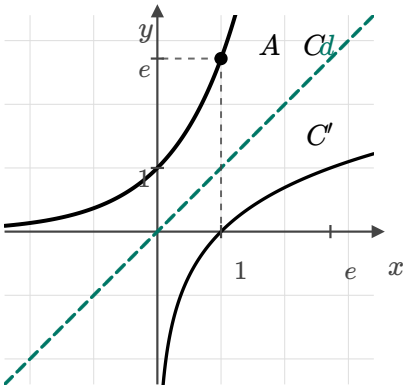
ب. نعم. e^{t} موجبٌ تماماً مهما يكن t ، فاللّوغاريتم معرّفٌ عليه دائماً، والنتيجة t نفسه. هذه هي الكتابة التي لا شرط لها.

التقابل العكسي، والطيّ على منصّف الربع الأوّل

ماذا يعني اجتماع الاتّجاهين هندسيّاً؟ يعني أنّ كلّ عددٍ موجبٍ تماماً هو صورة عددٍ حقيقيٍّ وحيدٍ وفق $\exp$ ، وأنّ كلّ عددٍ حقيقيٍّ هو صورة عددٍ موجبٍ تماماً وحيدٍ وفق $\ln$. فكلٌّ من التابعين تقابل، وأحدهما هو التقابل العكسي للآخر.

$$\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{+}^{*} \qquad \ln:\mathbb{R}_{+}^{*}\to\mathbb{R}$$

ولهذا أثرٌ مباشر على الرسم: الخطّ البياني C للتابع الأسّي هو نظير الخطّ البياني C' للّوغاريتم بالنسبة إلى المستقيم d الذي معادلته $y=x$ ، أي منصّف الربع الأوّل. الكتاب يقول ذلك ولا يبرهنه، والبرهان سطرٌ واحد: إذا كانت النقطة (a,b) على C' ، أي $b=\ln a$ ، كان $a=e^{b}$ ، فالنقطة (b,a) على C . وتبديل الإحداثيّين هو بالضبط التناظر بالنسبة إلى $y=x$.



اقرأ الشكل عند النقطة A : الفاصلة 1 تعطي على C الارتفاع e ، لأنّ $e^1 = e$. وعلى C' تجد العكس تماماً، فالفاصلة e تعطي الارتفاع 1 ، لأنّ $\ln e = 1$. النقطتان $(1, e)$ و $(e, 1)$ متناظرتان بالنسبة إلى d .

انتبه: أمران صغيران يكلّفان درجات. الأوّل: في شكل الكتاب C هو الخطّ البياني للتابع الأسّي و C' هو الخطّ البياني للّوغاريتم، أي أنّ الشرطة موضوعةٌ على التابع القديم لا على الجديد، عكس ما يتوقّعه أكثر الطلّاب. والثاني: لا تطوِ الورقة على أحد المحورين. التناظر هنا بالنسبة إلى المستقيم $y = x$ وحده؛ الطيّ على محور الفواصل يعطي $-\ln x$ ، وهو تابعٌ آخر تماماً.

الكتاب يضع بعد الشكل مثالاً بلا عنوان، وهو أفضل تمرينٍ على المساواتين معاً. بسّط العبارة الآتية عند $x > 0$.

$$e^{|\ln x|}$$

1. فصل القيمة المطلقة القيمة المطلقة تتبع إشارة ما بداخلها، و $\ln x \geq 0$ يكافئ $x \geq 1$. فلننظر إلى الحالتين على حدة.

$$|\ln x| = \begin{cases} \ln x, & x \geq 1 \\ -\ln x, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

2. الحالة الأولى عند $x \geq 1$ نطبّق $e^{\ln x} = x$ مباشرة، وشرطها $x > 0$ محقّقٌ هنا بلا كلام.

$$e^{|\ln x|} = e^{\ln x} = x$$

3. الحالة الثانية عند $0 < x < 1$ نستعمل قاعدة الوحدة السابقة $-\ln x = \ln \frac{1}{x}$ ، ثمّ نطبّق المساواة نفسها على $\frac{1}{x}$ ، وهو موجبٌ تماماً.

$$e^{-\ln x} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

4. جمع الحالتين عند $x \geq 1$ يكون $x \geq \frac{1}{x}$ ، وعند $0 < x < 1$ ينقلب الترتيب. ففي الحالتين النتيجة هي أكبر العددين.

$$e^{|\ln x|} = \max\left(x, \frac{1}{x}\right)$$

افحص نقطة الالتقاء دائماً: عند $x = 1$ يعطي الفرعان القيمة 1 نفسها، فلا قفزة بينهما. والترتيب العامّ للعمل واحدٌ لا يتغيّر: افصل القيمة المطلقة أوّلاً، ثمّ طبّق $e^{\ln u} = u$ على كلّ فرعٍ بعد أن تتأكّد أنّ u موجبٌ تماماً في ذلك الفرع.

$$u > 0 \Rightarrow e^{\ln u} = u$$

التزايد التامّ، والمقارنة بين أُسّين

التابع الأسّي متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}$. لاحظ كيف يبرهن الكتاب ذلك: بالخُلف، لا بالاشتقاق. والسبب أنّ اشتقاق $\exp$ لم يُبنَ بعد، وسيأتي في درسٍ لاحقٍ من الوحدة. فليكن u و v عددين حقيقيّين مع $u > v$ ، ولنفترض جدلاً أنّ $e^u \leq e^v$. التابع اللّوغاريتمي متزايدٌ تماماً فيحافظ على هذا الترتيب، إذن $\ln\left(e^u\right) \leq \ln\left(e^v\right)$ ، أي $u \leq v$ ، وهذا يناقض الفرض. إذن $e^u > e^v$.

انتبه: خطوةٌ يمرّ عليها الكتاب بلا كلمة، واكتبها أنت في ورقتك لأنّها مجّانيّة: أخذُ اللّوغاريتم لطرفَي متراجحةٍ مشروطٌ بأن يكون الطرفان موجبين تماماً. وهما كذلك هنا لأنّ $\exp$ يأخذ قيمه في $\mathbb{R}_+^*$ بنصّ التعريف. سطرٌ واحد يقفل ثغرةً في البرهان.

نتيجة 1

$a = b \iff e^a = e^b$ التابع الأسّي يحافظ على المساواة، في الاتّجاهين معاً.

$a < b \iff e^a < e^b$ ويحافظ على الترتيب حين تكون المقارنة صارمة.

$a \leq b \iff e^a \leq e^b$ ويحافظ عليه أيضاً حين تكون المقارنة بـ (leq). هذا السطر بالذات هو ما تحتاجه المتراجحات في المقطع الأخير.

الكتاب، الصفحة 166

قارن هذه النتيجة بنظيرتها في الوحدة السابقة على الصفحة 136 : هناك أيضاً ثلاثة سطور، لكنّ الثالث كان $a > b$ ، وكانت السطور الثلاثة كلّها مشروطةً بـ $a > 0$ و $b > 0$. هنا اختفى الشرط، وحلّ $\leq$ محلّ $>$. والتغييران مقصودان: a و b هنا أُسُسٌ، والأُسّ لا يُشترط فيه شيء؛ أمّا السطر الثالث فمكتوبٌ على مقاس المتراجحات التي تأتي بعد صفحة.

ما الشرط الذي يجب أن يتحقّق حتّى يصحّ التكافؤ $a \leq b \iff e^a \leq e^b$ ؟

أ) $a > 0$ و $b > 0$ ، كما كان الشرط في قاعدة اللّوغاريتم

ب) أن يكون a و b من إشارةٍ واحدة

ج) لا شرط إطلاقاً، أيّاً يكن العددان

ج. نعم، والكتاب يقولها بصراحة: «أيّاً يكن العددان». هذا هو الفرق الصامت عن الوحدة السابقة، وهو مقصود.

المعادلات والمتراجحات: مجموعة تعريفٍ لم تعد موجودة

السؤال الذي يطرحه الكتاب هنا هو: لماذا للمعادلتين $E_1 : e^{u(x)} = e^{v(x)}$ و $E_2 : u(x) = v(x)$ مجموعة الحلول نفسها؟ والجواب هو السطر الأوّل من النتيجة 1 مطبَّقاً عند كلّ حلٍّ على حدة: إذا كان x_0 حلّاً لـ E_1 كان $e^{u(x_0)} = e^{v(x_0)}$ ، فيعطي التكافؤ $u(x_0) = v(x_0)$ ، أي إنّ x_0 حلٌّ لـ E_2 . والعكس بالعكس، لأنّ التكافؤ يعمل في الاتّجاهين.

ثمّ يضيف الكتاب في نصف سطر: «ونبرهن بالمثل» أنّ $e^{u(x)} \leq e^{v(x)}$ و $u(x) \leq v(x)$ لهما مجموعة الحلول نفسها. وهذا ليس «بالمثل» بالضبط، ويستحقّ أن يُكتب: حالة المساواة تستعمل السطر الأوّل من النتيجة 1، وحالة المتراجحة تستعمل السطر الثالث. سطران مختلفان، والكتاب لا يسمّي أيّاً منهما في هذا الموضع.

انتبه: وهنا يختفي شيءٌ اعتدت عليه. في الوحدة السابقة كان لكلّ معادلةٍ لوغاريتميّة إجراءٌ من أربع خطواتٍ يبدأ بتحديد مجموعة التعريف. في هذا الدرس لا وجود لهذا الإجراء، والكتاب لا يقول لماذا: $\exp$ معرّفٌ على $\mathbb{R}$ كلّه، فمعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ لا تفرض على x أيّ شرطٍ سوى ما تفرضه u و v بنفسيهما. لا تُضِعْ دقائق في البحث عن مجموعة تعريفٍ غير موجودة.

انتبه: ولا تقلب القاعدة رأساً على عقب. إن بقي في العبارة لوغاريتمٌ واحد، عاد الشرط فوراً. في $\ln(e^x-2)=3$ يجب أن يكون $e^x-2>0$ ، أي $x>\ln 2$. التابع الأسّي لا يعفيك من اللّوغاريتم، هو فقط لا يضيف شرطاً من عنده. وتمرينا الكتاب ③❺ و ③❻ على الصفحة 168 مبنيّان على هذه الفكرة بالضبط.

المسألة الثالثة من مثال الكتاب هي الأهمّ عمليّاً، لأنّه لا يقع تحت القاعدة مباشرةً ويحتاج حيلةً واحدة. حلّ المتراجحة الآتية في $\mathbb{R}$.

$$e^{3x+1}\geq 2$$

1. لماذا لا تعمل القاعدة مباشرة النتيجة 1 تقارن أُسّاً بأُسّ، والطرف الأيمن هنا عددٌ مجرّد لا أُسّ. فالمتراجحة ليست بعدُ من النمط المدروس، وهذا ما يقوله الكتاب حرفيّاً.

2. كتابة العدد على صورةِ أُسّية كلّ عددٍ موجبٍ تماماً a يُكتب $a=e^{\ln a}$ ، وهذه ليست حيلةً جديدة بل هي المساواة $e^{\ln x}=x$ نفسها مقروءةً من اليمين إلى اليسار.

$$2=e^{\ln 2}$$

3. تطبيق النتيجة 1 صار الطرفان أُسّين، فتُقرأ المتراجحة على الأُسَّين مباشرةً، بلا انقلابٍ في الاتّجاه ولا شرطٍ إضافيّ.

$$e^{3x+1}\geq e^{\ln 2}\iff 3x+1\geq \ln 2$$

4. الحلّ نعزل x بالطرح ثمّ بالقسمة على 3 ، وهو عددٌ موجب فلا ينقلب الاتّجاه.

$$\mathcal{S}=\left[\frac{-1+\ln 2}{3},\ +\infty\right[$$

الحيلة كلّها سطرٌ واحد: حوّل العدد إلى أُسٍّ ثمّ قارن الأُسَّين. لكنّها مشروطةٌ بأن يكون العدد موجباً تماماً. والشرط مذكورٌ في الكتاب حيث تُقدَّم المساواة، لا هنا حيث تُستعمل، فمن قرأ هذه الصفحة وحدها لم يره. فلو كانت المتراجحة $e^{3x+1}\geq -3$ لما كان لـ $\ln(-3)$ معنى، والجواب حينها بلا حساب: كلّ عددٍ حقيقيّ يحقّقها، لأنّ الطرف الأيسر موجبٌ دائماً.

$$a>0\Rightarrow a=e^{\ln a}$$

حلّ المتراجحة $e^x \geq -1$ في $\mathbb{R}$.

أ) $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

ب) $x \geq \ln(-1)$

ج) $\mathcal{S} = \emptyset$

أ. نعم، وبلا حساب. e^x موجبٌ تماماً عند كلّ x ، فهو أكبر من -1 دائماً. أوّل ما تفعله في متراجحةٍ أُسّية: انظر إلى إشارة الطرف الآخر.

تذكّر: وكلمةٌ صريحة عن وزن هذا الدرس في البكالوريا: في اثنتي عشرة دورةً قرأناها لم تُطلَب علاقة التعاكس بين $\exp$ و $\ln$ ولا مرّةً واحدةً بوصفها مطلوباً مستقلّاً. أمّا التبسيط والمعادلات والمتراجحات التي في تمارين هذا الدرس فلم نُحصِ ورودها في الدورات، فلا نقول عنها شيئاً. والمؤكّد أنّ هذا الدرس الأرضيّة التي يقف عليها كلّ ما بعده: قواعد الحساب، والاشتقاق، والنهايات، والمعادلات التفاضليّة. من يمرّ عليه سريعاً يدفع الثمن لاحقاً، موزّعاً على أسئلةٍ كثيرة.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 165 إلى 168 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.