الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

خواص التابع الأسّي

الجمع يصير ضرباً، وبهذه القاعدة وحدها تُحلّ معادلات البكالوريا الأسّية

التابع الأسّي . الوحدة 6 . الدرس 2

في الوحدة السابقة رأيت قاعدةً واحدة تحوّل الضرب إلى جمع. هنا تعمل القاعدة نفسها بالمقلوب: التابع الأسّي يحوّل الجمع إلى ضرب، لأنّه التقابل العكسي للّوغاريتم. ومن هذه الجملة الواحدة تخرج ستّ قواعد للحساب، ثمّ يُفتح بها بابٌ جديد تماماً: تعريف القوّة بأُسٍّ حقيقيّ، فيصير $2^{\sqrt{2}}$ عدداً له معنى. وفي آخر الدرس تجد الحيلة التي تعيد كلّ معادلةٍ أسّيةٍ صعبة إلى معادلةٍ من الدرجة الثانية تعرفها منذ سنوات. هذه الحيلة وحدها ظهرت في خمس دورات من اثنتي عشرة قرأناها.

ستّ قواعد للحساب

كلّ ما في هذا المقطع يخرج من جملةٍ واحدة: التابع $\exp$ هو التقابل العكسي للتابع $\ln$. ولأنّ $\ln$ يحوّل الضرب إلى جمع، فإنّ معكوسه يحوّل الجمع إلى ضرب.

مبرهنة 2

$e^0 = 1$ و $x = 0$ هو الحلّ الوحيد للمعادلة $e^x = 1$.

$e^{a+b} = e^a \times e^b$ القاعدة الأساسيّة، أيّاً يكن العددان الحقيقيّان a و b .

$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$ المقلوب، وهو الحالة $b = -a$ من السطر الذي فوقه.

$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$ الطرح يصير قسمة.

$e^{a_1+a_2+\cdots+a_n} = e^{a_1} \times e^{a_2} \times \cdots \times e^{a_n}$ بالتدريج على العدد n ، كما في الوحدة السابقة.

$\left(e^a\right)^p = e^{pa}$ أيّاً يكن العدد الصحيح p . لاحظ الشرط: p صحيح، لا حقيقيّ. سنرفع هذا القيد في المقطع التالي.

الكتاب، الصفحة 169

برهان القاعدة الأساسيّة، الصفحة 169 . كلّ ما يلزم هو أن نطبّق $\ln$ على الطرفين ونستفيد من أنّه لا يأخذ القيمة نفسها مرّتين.

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

1. لوغاريتم الطرف الأيمن نحسب لوغاريتم الجداء بقاعدة الوحدة السابقة، ثمّ نستعمل $\ln(e^a) = a$ ، وهو معنى الرمز نفسه.

$$\ln\left(e^a e^b\right) = \ln(e^a) + \ln\left(e^b\right) = a + b$$

2. لوغاريتم الطرف الأيسر وبالطريقة نفسها، لوغاريتم الطرف الأيسر هو الأُسّ نفسه.

$$\ln\left(e^{a+b}\right) = a + b$$

3. الخلاصة للطرفين اللوغاريتم نفسه. ولأنّ $\ln$ تقابل، فلا يمكن لعددين مختلفين أن يكون لهما اللوغاريتم نفسه. إذن الطرفان متساويان.

$$\ln A = \ln B \implies A = B$$

الخطوة الحاسمة هي الأخيرة، وهي التي لا يذكرها الكتاب باسمها: التابع $\ln$ تقابل، فمساواة اللوغاريتمين تعني مساواة العددين. احتفظ بهذه الجملة، فهي تُستعمل في كلّ برهان من براهين هذا الدرس.

$$A > 0,\ B > 0 \implies (\ln A = \ln B \iff A = B)$$

تذكّر: والباقي يتساقط من هذه الواحدة. ضع $b = -a$ فتحصل على $e^a e^{-a} = e^0 = 1$ ، ومنه المقلوب. وعوّض $-b$ مكان b فتحصل على القسمة. والقاعدة الخامسة بالتدريج، والسادسة بوضع كلّ الأعداد متساوية في الخامسة.

بسّط كتابة العدد $e^{2+\ln 8}$.

أ) $8e^2$

ب) $e^2 + 8$

ج) e^{16}

أ. نعم. الجمع في الأُسّ يصير ضرباً: $e^2 \times e^{\ln 8}$ ، والعامل الثاني هو 8 بحكم معنى الرمز.

القوّة بأُسٍّ حقيقيّ

حتّى الآن كنت ترفع عدداً إلى أُسٍّ صحيح، وتعرف ما يعنيه 2^3 : جداء ثلاثة عوامل. لكن ما معنى $2^{\sqrt{2}}$ ؟ لا يمكنك ضرب العدد 2 في نفسه $\sqrt{2}$ مرّة. هنا يفتح التابع الأسّي الباب.

تعريف 2

$a^x = e^{x \ln a}$ في حالة عددٍ حقيقيٍّ موجب تماماً a وعددٍ حقيقيٍّ ما x . وهذا هو التعريف، لا نتيجةً تُبرهن.

$\ln(a^x) = x \ln a$ الصيغة نفسها مقروءةً باللوغاريتم.

الكتاب، الصفحة 170

$$2^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\,\ln 2} \approx 2.6651, \qquad \pi^{\pi} = e^{\pi \ln \pi} \approx 36.46216$$

تذكّر: وهنا سؤالٌ يجب أن يخطر لك: إذا كان a^x تعريفاً جديداً، فهل يوافق ما تعرفه عن القوى الصحيحة؟ أي هل 2^3 بالتعريف الجديد يساوي $2 \times 2 \times 2$ ؟ الجواب نعم، والدليل هو القاعدة السادسة من المقطع السابق: ضع فيها $a = \ln b$ فتصير $\left(e^{\ln b}\right)^p = e^{p \ln b}$ ، أي $b^p = e^{p \ln b}$. الطرف الأيسر هو القوّة القديمة والأيمن هو التعريف الجديد، وهما واحد.

انتبه: الكتاب يضع القاعدة السادسة في الصفحة التي تسبق التعريف مباشرةً ولا يقول إنّها هي التحقّق من التوافق. وهي أيضاً الجواب عن السؤال المفتوح في الوحدة السابقة، حيث سأل الكتاب هل يلتبس e^m بجداء m عاملاً وتركه بـ «لماذا؟». هنا يُغلق ذلك السؤال، من دون أن يقول الكتاب إنّه يُغلقه.

ولاحظ شرط التعريف: a موجبٌ تماماً. الأساس السالب ممنوع، لأنّ $\ln a$ لا يوجد عندئذٍ. ولهذا لا معنى للرمز $(-2)^{\pi}$ ، وهذا واحد من ثلاثة أخطاء يحذّر منها الكتاب صراحةً في آخر الوحدة.

أيّ الكتابات الآتية بلا معنى؟

أ) $3^{\sqrt{5}}$

ب) $(-2)^{\pi}$

ج) $2^{-\pi}$

ب. نعم. التعريف يمرّ بـ $\ln a$ ، و $\ln(-2)$ غير موجود. الأساس يجب أن يكون موجباً تماماً.

مبرهنة 3

$1^u = 1$ لأنّ $\ln 1 = 0$ ، فالأُسّ يصير صفراً.

$a^u \times a^v = a^{u+v}$ أيّاً يكن $a > 0$ والعددان الحقيقيّان u و v .

$(a \cdot b)^u = a^u \times b^u$ بشرط $a > 0$ و $b > 0$.

$\left(a^u\right)^v = a^{u \cdot v}$ وهنا الأُسّان حقيقيّان، بخلاف القاعدة السادسة من المبرهنة السابقة.

$\frac{a^u}{a^v} = a^{u-v}$ الطرح في الأُسّ.

$\frac{a^u}{b^u} = \left(\frac{a}{b}\right)^u$ الأُسّ المشترك يخرج على الكسر كلّه.

الكتاب، الصفحة 170

تذكّر: براهين القواعد الستّ كلّها بحركةٍ واحدة: اكتب كلّ قوّةٍ بصيغة $e^{u \ln a}$ ، طبّق قاعدة الجمع في الأُسّ، ثمّ اقرأ النتيجة قوّةً من جديد. لا تحفظها واحدةً واحدة، بل احفظ الحركة.

انتبه: الكتاب لا يربط القوّة الحقيقيّة بالجذور في نصّ الدرس، مع أنّ تمرين ② ❾ يطلب $\sqrt[6]{27} \times 3^{\frac{1}{2}}$. الجسر هو $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ ، ونحن نضعه هنا لأنّك تحتاجه. والكتاب يضعه أيضاً، لكن متأخّراً: في قسم التمارين على الصفحة 194 ، حيث يعرّف تابع الجذر من المرتبة n بأنّه التقابل العكسي للتابع $x \mapsto x^n$.

مثال محلول: تبسيط الكتابة

مثال الكتاب على الصفحتين 169 و 170 . المطلوب تبسيط ثلاث عبارات، علماً أنّ x عددٌ حقيقيّ. ولاحظ في الثلاثة الحركة نفسها: افصل الأُسّ إلى مجموع، ثمّ اقرأ كلّ عاملٍ على حدة.

$$A = e^{2+\ln 8}, \quad B = \frac{e^2}{e^{1+\ln 2}}, \quad C = \left(e^{2x}\right)\left(e^{-x}\right)^3$$

1. العبارة الأولى الأُسّ مجموع، فالعدد جداء. والعامل $e^{\ln 8}$ هو 8 ، لأنّ الأُسّي واللوغاريتمي متعاكسان.

$$A = e^2 \times e^{\ln 8} = e^2 \times 8 = 8e^2$$

2. العبارة الثانية على غرار الأولى: المقام هو $e^{\ln 2} \times e^1 = 2e$. ثمّ نختصر.

$$B = \frac{e^2}{2e} = \frac{e}{2}$$

3. العبارة الثالثة أوّلاً $(e^{-x})^3 = e^{-3x}$ بالقاعدة السادسة، ثمّ الضرب يجمع الأُسّين.

$$C = e^{2x} \cdot e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$$

في كلّ تبسيطٍ أُسّيّ: افصل الأُسّ إلى مجموع، حوّل المجموع إلى جداء، ثمّ ابحث عن العوامل من الشكل $e^{\ln k}$ واقرأها k مباشرة. هذه ثلاث حركات ثابتة، لا حيلة جديدة في كلّ تمرين.

$$e^{\ln k} = k \quad (k > 0)$$

الحيلة التي تحسم المعادلات الأسّية

وصلنا إلى الجزء الذي تسأل عنه البكالوريا أكثر من أيّ جزءٍ آخر في هذه الوحدة. الفكرة واحدة: معادلةٌ فيها e^{2x} و e^{x} ليست معادلةً جديدة، بل معادلةٌ من الدرجة الثانية متنكّرة.

الطريقة

$ae^{2x} + be^{x} + c = 0$ الشكل الذي نتعامل معه، ويسمّيه الكتاب (E) .

$X = e^{x} \implies aX^2 + bX + c = 0$ نضع $X = e^{x}$ فتصير معادلةً من الدرجة الثانية، يسمّيها الكتاب (E') .

$x_0 = \ln X_0 \quad (X_0 > 0)$ وحلول (E) ، إن وجدت، هي لوغاريتمات الحلول الموجبة تماماً للمعادلة (E') .

الكتاب، الصفحة 171

انتبه: الشرط $X_0 > 0$ هو نصف الطريقة. للمعادلة من الدرجة الثانية قد يكون جذران، وقد يكون أحدهما سالباً أو معدوماً؛ ذاك يُرفض، لأنّ e^{x} موجبٌ تماماً عند كلّ x . ومن نسي هذا الفحص أضاف حلاًّ غير موجود. وقد لا يبقى أيّ حلّ، ولهذا يكتب الكتاب «إن وجدت».

المثال الأوّل من الكتاب على الصفحة 171 . لا حاجة هنا إلى تغيير المجهول: الطرفان لوغاريتمان، أو بالأحرى أُسّيّان، فيكفي مساواة الأُسّين.

$$e^{x^2} = \left(e^x\right)^3 e$$

1. توحيد الطرف الأيمن بالقاعدة السادسة $\left(e^x\right)^3 = e^{3x}$ ، ثمّ الضرب في e يزيد واحداً على الأُسّ.

$$\left(e^x\right)^3 e = e^{3x} \cdot e^1 = e^{3x+1}$$

2. مساواة الأُسّين صار الطرفان من الشكل $e^{u(x)} = e^{v(x)}$. ولأنّ التابع الأسّي تقابل، فالمعادلة تكافئ $u(x) = v(x)$ نفسها، من دون أيّ شرطٍ إضافيّ.

$$x^2 = 3x + 1 \iff x^2 - 3x - 1 = 0$$

3. الحلّ المميّز هو $9 + 4 = 13$ ، وهو موجب، فللمعادلة جذران. ولا يُرفض أيّ منهما، لأنّ x هنا ليس مقيّداً بشيء.

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{13}}{2},\ \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \right\}$$

احفظ الفرق بين الحالتين. إذا كان الطرفان أُسّيّين، تكفي مساواة الأُسّين ولا شرط. وإذا ظهر e^{2x} مع e^x ، فالطريق هو تغيير المجهول، وهناك يظهر شرط الإيجاب.

$$e^{u(x)} = e^{v(x)} \iff u(x) = v(x)$$

المثال الثالث من الصفحة نفسها، وهو الأهمّ. متراجحة فيها e^x ومقلوبه، وتُحلّ بحركتين: توحيدٌ بالضرب، ثمّ تغيير المجهول.

$$e^x + 4e^{-x} \leq 5$$

1. كتابة المقلوب بما أنّ $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$ ، ننقل كلّ شيء إلى طرفٍ واحد.

$$e^x - 5 + \frac{4}{e^x} \leq 0$$

2. الضرب في مقدارٍ موجب نضرب الطرفين في e^x . وهذا مشروعٌ من دون قلب المتراجحة، لأنّ $e^x > 0$ عند كلّ x . هذه هي الخطوة التي تُفقد فيها الدرجات: من ضرب بمقدارٍ لا يعرف إشارته يخسر المتراجحة.

$$e^{2x} - 5e^x + 4 \leq 0$$

3. تغيير المجهول نضع $X = e^x$ ، فتصير المتراجحة من الدرجة الثانية. وهي محقّقة بين جذري ثلاثيّ الحدود، وهما 1 و 4 .

$$X^2 - 5X + 4 \leq 0 \iff 1 \leq X \leq 4$$

4. العودة إلى المتحوّل نعود بـ $X = e^x$ ، أي $1 \leq e^x \leq 4$. ولأنّ التابع الأسّي متزايدٌ تماماً، تُقرأ المتراجحة على الأُسّ مباشرة، مع $1 = e^0$ و $4 = e^{\ln 4}$.

$$\mathcal{S} = [0,\ \ln 4]$$

ثلاث حركات، بهذا الترتيب: اضرب في e^x لتتخلّص من المقلوب، غيّر المجهول لتصل إلى الدرجة الثانية، ثمّ عُد بلوغاريتم الحدود. والخطوة الأولى لا تقلب المتراجحة، والسبب يُكتب ولا يُفترض.

$$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$$

حلّ المعادلة $e^{2x} - e^x - 6 = 0$.

أ) $x = \ln 3$ أو $x = \ln(-2)$

ب) $x = 3$ أو $x = -2$

ج) $x = \ln 3$

ج. نعم. بوضع $X = e^x$ تصير $X^2 - X - 6 = 0$ بجذرين 3 و -2 . والجذر السالب مرفوض لأنّ $e^x > 0$ ، فيبقى $e^x = 3$.

تذكّر: وزن هذا المقطع في البكالوريا هو الأعلى في الوحدة كلّها: الطلب على معادلةٍ أو متراجحةٍ من الدرجة الثانية في e^x ظهر في خمس دورات من اثنتي عشرة قرأناها، مرّةً بأربعين درجة. وهو أيضاً الهدف السادس في تصنيف التمارين لدى دليل المعلّم.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 169 إلى 172 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.