الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الكتابة العقديّة للتحويلات الهندسيّة

الانسحاب والتحاكي والدوران، لكلٍّ منها معادلة واحدة تربط النقطة بصورتها

تطبيقات الأعداد العقديّة في الهندسة . الوحدة 5 . الدرس 3

في الدرسين السابقين ترجمنا الهندسة إلى أعداد: الشعاع صار عدداً، والطول صار طويلة، والزاوية صارت زاوية عدد. الآن نقطف الثمرة. كلّ تحويل من التحويلات التي تعرفها منذ سنوات يُكتب بمعادلة واحدة بين z و z' ، وكلّ معادلة من هذا الشكل تكشف بدورها نوع التحويل وعناصره. هذا الدرس هو الأكثر حضوراً في الامتحان من هذه الوحدة.

الصيغة العقديّة لتحويل

في هذه الفقرة نزوّد المستوي بمعلم متجانس ومباشر $(O; u, v)$. بدون هذا الشرط لا معنى لأيّ حساب يأتي بعده.

لنفترض أنّ لدينا تحويلاً يقرن بكلّ نقطة M يمثّلها العدد z نقطةً M' يمثّلها العدد z' . ما دام لكلّ z صورةٌ واحدة z' ، فيمكننا أن نقرن بهذا التحويل تابعاً معرّفاً على $\mathbb{C}$:

$$f : z \to z' = f(z)$$

وما الكتابة $z' = f(z)$ إلّا الصيغة العقديّة للتحويل. صار التحويل الهندسي معادلةً، وصار السؤال الهندسي حساباً.

تذكّر: كلّ ما في هذا الدرس اتّجاهان اثنان: من الهندسة إلى المعادلة، ومن المعادلة إلى الهندسة. الكتاب يكتب مبرهناته على شكل تكافؤ لهذا السبب بالذات، فهي تُقرأ في الاتّجاهين.

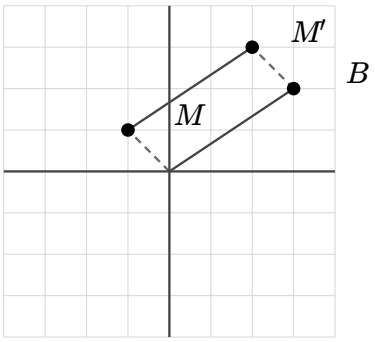
نصيحة عمليّة قبل أن نبدأ: في كلّ مسألة اكتب قانون التحويل أوّلاً بالرموز، ثمّ عوّض الأعداد، ثمّ ترجم النتيجة إلى جملة هندسيّة. هذا هو الترتيب الذي يمشي عليه سلّم التصحيح، وكتابة القانون وحدها تُحسب.

الانسحاب: جمع عدد ثابت

نبدأ بأبسط التحويلات. الانسحاب الذي شعاعه w ينقل كلّ نقطة المسافة نفسها في الاتّجاه نفسه، أي أنّ $\overrightarrow{MM'} = w$ مهما كانت M .

ونحن نعرف من درس تمثيل الأشعّة أنّ العدد الذي يمثّل $\overrightarrow{MM'}$ هو $z' - z$. فإذا كان b العدد الذي يمثّل w ، انقلبت العلاقة الشعاعيّة إلى معادلة بين عددين:

$$z' - z = b \iff z' = z + b$$



B صورة العدد b الذي يمثّل w . الشعاعان $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{MM'}$ متساويان، فالرباعي $OBM'M$ متوازي أضلاع.

مبرهنة 3: الانسحاب

$\overrightarrow{MM'} = w$ الخاصّة الهندسيّة: التحويل انسحاب شعاعه w .

$z' = z + b$ الصيغة العقديّة، حيث b العدد الذي يمثّل w . الخاصّتان متكافئتان، فالقراءة تصحّ في الاتّجاهين.

الكتاب، الصفحة 119

انتبه: الانسحاب هو الوحيد بين التحويلات الثلاثة الذي لا مركز له. لا نقطة صامدة فيه إطلاقاً إلّا إذا كان $b = 0$ ، وعندها يبقى كلّ شيء في مكانه. من يبحث عن مركز لانسحاب يبحث عمّا ليس موجوداً.

الانسحاب شعاعه $w = -2u + 3v$. ما صورة النقطة التي يمثّلها $z = 1 + i$ ؟

أ) $3 - 2i$

ب) $-2 + 3i$

ج) $-1 + 4i$

ج. صحيح. $b = -2 + 3i$ ، ومنه $z' = (1 + i) + (-2 + 3i) = -1 + 4i$.

التحاكي: ضرب من المركز

التحاكي الذي مركزه Ω ونسبته k يترك المركز في مكانه ويسحب كلّ نقطة على المستقيم الواصل بينها وبين المركز، بحيث $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$. والنسبة k عدد حقيقي غير معدوم.

العدد الذي يمثّل $\overrightarrow{\Omega M}$ هو $z - \omega$ ، والذي يمثّل $\overrightarrow{\Omega M'}$ هو $z' - \omega$. نترجم العلاقة الشعاعيّة حرفاً بحرف:

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

مبرهنة 4: التحاكي

$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ الخاصّة الهندسيّة: التحويل تحاكٍ مركزه Ω ونسبته k .

$k \in \mathbb{R}\ ,\ k \neq 0$ $\quad$ $z' - \omega = k(z - \omega)$ الصيغة العقديّة، حيث ω العدد الذي يمثّل المركز Ω .

الكتاب، الصفحة 119

انتبه: $z' = kz$ ليست صيغة التحاكي إلّا إذا كان المركز هو المبدأ. عند مركز آخر يجب الطرح أوّلاً: انقل إلى المركز بالطرح، ثمّ اضرب، ثمّ أعِد المركز بالجمع. من ينسى الطرح يحصل على تحاكٍ صحيح النسبة وخاطئ المركز.

هذا مثال الكتاب نفسه، وهو المكان الذي تُكسب فيه النقاط: التحاكي مركزه Ω الذي يمثّله $1 + i$ ونسبته $k = 3$. اكتب صيغته العقديّة، ثمّ جد صورة النقطة A التي يمثّلها $2 - i$.

$$\omega = 1 + i \qquad k = 3 \qquad a = 2 - i$$

1. نكتب القانون بالرموز قبل أيّ عدد. هذا السطر وحده يُحسب في التصحيح، وهو أيضاً ما يمنع نسيان المركز لاحقاً.

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

2. نعوّض المركز والنسبة نضع $\omega = 1 + i$ و $k = 3$. لاحظ القوسين حول $1 + i$ في الطرفين: المركز يُطرح من z ومن z' معاً.

$$z' - (1 + i) = 3\,(z - (1 + i))$$

3. ننشر ونعزل z' ننشر الطرف الأيمن، ثمّ نضيف $1+i$ إلى الطرفين. هنا يختفي المركز من الكتابة، وهذا بالضبط ما يجعل قراءته لاحقاً صعبة.

$$\begin{aligned} z' &= 3z - 3 - 3i + 1 + i \\ &= 3z - 2 - 2i \end{aligned}$$

4. نحسب صورة A نعوّض $z = 2 - i$ في الصيغة المنشورة.

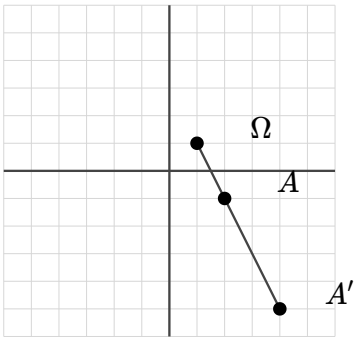
$$a' = 3(2 - i) - 2 - 2i = 6 - 3i - 2 - 2i = 4 - 5i$$

5. نقرأ النتيجة هندسيّاً النقطة A' تقع على نصف المستقيم $[\Omega A)$ نفسه لأنّ النسبة موجبة، وبُعدها عن المركز ثلاثة أمثال بُعد A . الجواب لا يكتمل بلا هذه الجملة.

$$\overrightarrow{\Omega A'} = 3\,\overrightarrow{\Omega A}$$

القانون أوّلاً، ثمّ التعويض، ثمّ النشر. لا تبدأ أبداً من الشكل المنشور.

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$



النقاط الثلاث على مستقيم واحد، والمركز Ω لا يتحرّك. البُعد $\Omega A'$ يساوي ثلاثة أمثال ΩA .

التحاكي مركزه O ونسبته 3 . ما صورة النقطة التي يمثّلها $z = 1 + i$ ؟

أ) $3 + 3i$

ب) $3 + i$

ج) $4 + 4i$

أ. صحيح. المركز هو المبدأ، أي $\omega = 0$ ، فيبقى $z' = 3z = 3 + 3i$.

الدوران: ضرب بعدد طويلته 1

الدوران الذي مركزه Ω وزاويته θ يحفظ البُعد عن المركز ويدير الشعاع بزاوية θ . أي أنّ $\Omega M' = \Omega M$ وأنّ $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$.

نفترض أوّلاً أنّ $M \neq \Omega$ ، أي $z \neq \omega$ ، فيكون المقام غير معدوم وتصحّ القسمة. عندئذٍ نستعمل أداة الدرس السابق: خارج القسمة $\frac{z'-\omega}{z-\omega}$ طويلته نسبة الطولين وزاويته هي الزاوية بين الشعاعين، فالشرطان الهندسيّان يصيران شرطين على عدد واحد:

$$\left|\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right| = 1 \qquad \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega}\right) = \theta$$

وعدد طويلته 1 وزاويته θ هو $e^{i\theta}$ بالشكل الأسّي، لا سواه. إذاً خارج القسمة نفسه يساوي $e^{i\theta}$ ، وبضرب الطرفين في المقام:

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$$

تذكّر: بقيت الحالة $M = \Omega$ التي استثنيناها قبل القسمة. نضعها في الصيغة فتعطي $z' = \omega$ ، وهذا يوافق أنّ المركز نقطة صامدة لا تتحرّك بالدوران. فالصيغة تصحّ في الحالتين معاً، وهكذا يختم الكتاب إثباته.

مبرهنة 5: الدوران

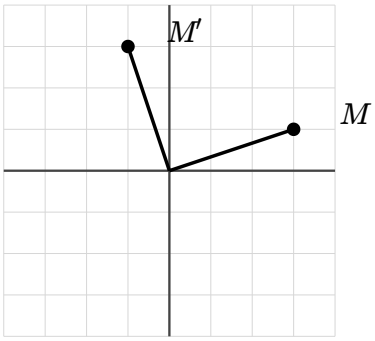
$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$ $\quad$ $\Omega M' = \Omega M$ الخاصّة الهندسيّة: التحويل دوران مركزه Ω وزاويته θ .

$\theta \in \mathbb{R}$ $\quad z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ الصيغة العقديّة للدوران، والزاوية θ عدد حقيقي.

$z \to z' = e^{i\theta}z$ الحالة الخاصّة التي يكون فيها المركز هو المبدأ O ، أي $\omega = 0$.

الكتاب، الصفحة 120

انتبه: لا تكتب $z' = e^{i\theta}z$ إلّا إذا كان المركز هو المبدأ. عند مركز آخر يجب الطرح أوّلاً، ثمّ الدوران، ثمّ إعادة المركز. هذا هو الخطأ الأكثر تكراراً في أسئلة هذه الوحدة.



دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ، أي الضرب بـ $e^{i\pi/2} = i$. هنا $z = 3 + i$ و $z' = i(3 + i) = -1 + 3i$. البُعدان عن المبدأ متساويان.

الدوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{4}$. ما صورة النقطة التي يمثّلها $z = 1 + i$ ؟

أ) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$

ب) $i\sqrt{2}$

ج) $-1 + i$

ب. صحيح. طويلة z هي $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، فبعد إضافة $\frac{\pi}{4}$ تصير الزاوية $\frac{\pi}{2}$ والطويلة كما هي.

من الصيغة إلى التحويل

حتّى الآن مشينا من الهندسة إلى المعادلة. الامتحان يسأل الاتّجاه الآخر بالقدر نفسه: تُعطى العلاقة بين z و z' ، ويُطلب نوع التحويل وعناصره.

كيف تقرأ الصيغة

$z' = z + b$ انسحاب شعاعه ممثّل بالعدد b . جمعٌ، لا ضرب.

$z' - \omega = k(z - \omega)\ ,\ k \in \mathbb{R}\ ,\ k \neq 0$ تحاكٍ مركزه Ω ونسبته k .

$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)\ ,\ \theta \in \mathbb{R}$ دوران مركزه Ω وزاويته θ ، ويصير $z' = e^{i\theta}z$ إذا كان المركز هو المبدأ.

الكتاب، الصفحة 120

الفرق بين السطرين الأخيرين ليس في الشكل بل في المعامل: إن كان حقيقيّاً فالتحويل تحاكٍ، وإن كانت طويلته 1 فهو دوران. اقرأ المعامل قبل أن تسمّي التحويل.

لكنّ الصيغة تصل في الامتحان منشورة في الغالب، مثل $z' = 3z - 2 - 2i$ ، والمركز عندئذ غير مكتوب. نجده بخاصّته الوحيدة: المركز هو النقطة الصامدة، أي التي صورتها هي نفسها.

$$\omega = 3\omega - 2 - 2i \iff -2\omega = -2 - 2i \iff \omega = 1 + i$$

انتبه: في $z' = 3z - 2 - 2i$ ليس $-2 - 2i$ هو المركز. المركز هو $1 + i$ ، والحدّ الثابت ناتج النشر لا أكثر. من يقرأ الحدّ الثابت مركزاً يخطئ في كلّ سؤال يليه.

بقيت حالة لها اسم خاص: $k = -1$. نضعها في قانون التحاكي فنحصل على التناظر المركزي الذي مركزه Ω .

$$z' - \omega = -(z - \omega) \iff z' = 2\omega - z$$

ولاحظ أنّ $k = -1$ هو الموضع الوحيد الذي تلتقي فيه القراءتان: فهو عدد حقيقي وطويلته 1 في آن واحد. ولهذا فالتناظر المركزي والدوران بزاوية π حول المركز نفسه تحويل واحد لا اثنان.

ولنكن دقيقين: الكتاب لا يذكر التناظر المركزي بين مبرهناته الثلاث، لكنّه يسمح لـ k بأن يكون أيّ عدد حقيقي غير معدوم، ويطلب هذا التحويل في تمريناته. فالصيغة مستنتجة من قانون التحاكي، لا منقولة عن الكتاب.

ويطلب الكتاب في تدرّبه تحويلاً أخيراً له اسم: التناظر المحوري الذي محوره (Ox) . المرافق يبقي الجزء الحقيقي ويقلب إشارة الجزء التخيلي، وهذا بعينه ما يفعله التناظر بالنسبة إلى محور الفواصل:

$$z' = \bar{z}$$

ولنكن دقيقين هنا أيضاً، بل أكثر: هذا التحويل مضاف من خارج مبرهنات الدرس. الكتاب يطلبه في تدرّبه ولا يعرّفه ولا يستنتجه، وهو لا يُستنتج من الصيغ الثلاث أصلاً، لأنّها جميعاً تضرب z وتجمع إليه، ولا يظهر المرافق في أيّ منها. احفظه على حدة، ولا تسمّه دوراناً ولا تحاكياً.

شكلان مفتاحيّان في الامتحان

يختم الكتاب الدرس بشكلين يتكرّران في الامتحان أكثر من التحويلات نفسها. الفكرة واحدة في الاثنين: نقرأ الشعاع $\overrightarrow{AC}$ على أنّه صورة الشعاع $\overrightarrow{AB}$ بدوران مركزه الرأس A .

المثلّث ABC قائم الزاوية في A ومتساوي الساقين إذا وفقط إذا كانت C صورة B بدوران مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$ أو $-\frac{\pi}{2}$. نضع ذلك في قانون الدوران، ولأنّ $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ و $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$ تجتمع الحالتان في كتابة واحدة:

$$c - a = \pm i(b - a)$$

والمثلّث متساوي الأضلاع إذا وفقط إذا كان الدوران نفسه بزاوية $\frac{\pi}{3}$ أو $-\frac{\pi}{3}$. الصيغة هي هي، ولم يتغيّر فيها إلّا الأسّ.

حول الشكل المفتاحي

$c - a = i(b - a)$ المثلّث ABC قائم الزاوية في A ومتساوي الساقين، والدوران بزاوية $\frac{\pi}{2}$.

$c - a = -i(b - a)$ الحالة نفسها بالاتّجاه المعاكس، أي بزاوية $-\frac{\pi}{2}$.

$c - a = e^{i\pi/3}(b - a)$ المثلّث ABC متساوي الأضلاع، والدوران بزاوية $\frac{\pi}{3}$.

$c - a = e^{-i\pi/3}(b - a)$ الحالة نفسها بالاتّجاه المعاكس.

الكتاب، الصفحة 121

انتبه: الطويلة وحدها لا تعطي نوع المثلّث. $|c - a| = |b - a|$ تقول إنّ الساقين متساويتان، ولا تقول شيئاً عن الزاوية. الطويلة تقرّر الأضلاع والزاوية تقرّر الزوايا، فاذكر الاثنين معاً قبل أن تسمّي المثلّث.

تذكّر: الفرق بين الشكلين أسٌّ واحد: $e^{i\frac{\pi}{2}}$ تعطي القائم المتساوي الساقين، و $e^{i\frac{\pi}{3}}$ تعطي المتساوي الأضلاع. الصيغتان متشابهتان إلى حدّ الخداع، فاقرأ الأسّ قبل أن تحكم.

تذكّر: وأخيراً: التحويلات الثلاثة كلّها حالات من قراءة واحدة. اضرب في عدد طويلته 1 تحصل على دوران، اضرب في عدد حقيقي تحصل على تحاكٍ، اجمع عدداً ثابتاً تحصل على انسحاب.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 119 إلى 122 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.