الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

بعض قواعد حساب التوابع الأصليّة

جدولان يُقرآن بالمقلوب، وثلاث حيل تُرجع إليهما كلّ ما يُطلب في البكالوريا

التكامل والتوابع الأصليّة . الوحدة 7 . الدرس 2

الدرس الأوّل عرّف التابع الأصليّ ولم يحسب منه إلّا واحداً في مثالٍ يتيم، وتمارينه كلّها فحصٌ لا حساب. هنا يبدأ الحساب، وأداته جدولان لا أكثر. الأوّل يعطي تابعاً أصليّاً لكلّ تابعٍ مألوف، والثاني يعطيه لكلّ تركيبٍ ظهر فيه العامل u' . وليس في الجدولين سطرٌ جديدٌ عليك: هما جدول الاشتقاق نفسه مقروءاً بالمقلوب. لذلك فإنّ المطلوب منك من الآن فصاعداً ليس حفظاً جديداً، بل تعرُّفاً: أيّ سطرٍ يشبه ما بين يديك، وأيّ حيلةٍ تُرجعه إليه.

الجدول الأوّل، توابع مألوفة

في الاشتقاق كانت لديك قواعد تُطبَّق على أيّ تابع: مشتقّ الجداء، مشتقّ الخارج، مشتقّ المركّب. في حساب التابع الأصليّ لا توجد قاعدةٌ من هذا النوع، ولا خوارزميّة تُنفَّذ على تابعٍ كيفما كان. السؤال الوحيد هو: أيّ تابعٍ مشتقّه هو التابع الذي أمامي؟ ولهذا فإنّ الجدول الآتي ليس جدولاً جديداً تحفظه، بل جدول مشتقّات التوابع المألوفة وقد بُدِّل عمودَاه. تحقّق من كلّ سطرٍ بنفسك: اشتقّ F ، فيظهر f .

جدول بتوابع أصليّة لبعض التوابع المألوفة

$f(x)=a \Longrightarrow F(x)=a\,x$ على $I=\mathbb{R}$ ، و a عددٌ حقيقيّ ثابت.

$f(x)=x^n \Longrightarrow F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ على $I=\mathbb{R}$ ، و n عددٌ طبيعيّ.

$f(x)=x^n \Longrightarrow F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ على $]0,+\infty[$ أو على $]-\infty,0[$ ، و n عددٌ صحيحٌ أصغر تماماً من -1 .

$f(x)=x^\alpha \Longrightarrow F(x)=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ على $]0,+\infty[$ وحده، و α عددٌ حقيقيّ لا يساوي -1 .

$f(x)=\frac{1}{x} \Longrightarrow F(x)=\ln x$ على $]0,+\infty[$.

$f(x)=\frac{1}{x} \Longrightarrow F(x)=\ln(-x)$ على $]-\infty,0[$. الكتاب يجمع هذا السطر والذي فوقه في خانةٍ واحدة، وفصلناهما لأنّ هذا هو الذي يُنسى.

$f(x)=e^x \Longrightarrow F(x)=e^x$ على $I=\mathbb{R}$ ، وهو السطر الوحيد الذي لا يتغيّر فيه شيء.

$f(x)=\sin x \Longrightarrow F(x)=-\cos x$ على $I=\mathbb{R}$. الإشارة السالبة هي كلّ الفخّ في هذا السطر.

$f(x)=\cos x \Longrightarrow F(x)=\sin x$ على $I=\mathbb{R}$ ، وهنا لا إشارة.

$f(x)=\frac{1}{\cos^2 x} \Longrightarrow F(x)=\tan x$ على $\left]-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$ ، و k عددٌ صحيح. ليس مجالاً واحداً بل عائلة مجالات.

$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} \Longrightarrow F(x) = -\cot x$ على $]\pi k,\ \pi(k+1)[$ ، و k عددٌ صحيح.

$$f(x) = g(ax+b)$$
$$F(x) = \frac{1}{a}\,G(ax+b)$$

بشرط $a \neq 0$ ، حيث G تابعٌ أصليّ للتابع g . هذا السطر ليس تابعاً بعينه بل قاعدة، ولذلك سمّينا التابع الأساسَ g بدل f : الكتاب يستعمل الحرف f هنا بمعنيين في سطرٍ واحد.

الكتاب، الصفحة 203

انظر إلى أسطر القوى الثلاثة. الصيغة فيها واحدة، $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ ، والشرط مختلفٌ ثلاث مرّات، والمجال معه. n طبيعيّ يعطيك $\mathbb{R}$ كلّه. n صحيحٌ أصغر تماماً من -1 يجبرك على أحد نصفي المستقيم، لأنّ x^n غير معرّفٍ عند الصفر. و α حقيقيّ يضيّق المجال إلى $]0,\ +\infty[$ وحده، لأنّ x^α معرّفٌ عندئذٍ بالكتابة $e^{\alpha \ln x}$ ، وهذه تحتاج x موجباً تماماً. ثلاثة أسطر، ثلاث مجموعاتٍ عدديّة، ثلاثة مجالات. والسطران الأوّلان لا يتداخلان: الأوّل يغطّي $n \geq 0$ والثاني $n \leq -2$.

انتبه: لا سطر من هذه الثلاثة يشمل $n = -1$ ، ولا يمكن أن يشمله: المقام $n+1$ يصير صفراً. تابعٌ أصليّ للتابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ هو اللوغاريتم، لا قوّة. وهذا خطأٌ صامت: تكتب $\frac{x^0}{0}$ ولا يوقفك شيءٌ إلّا انتباهك.

أيّ سطرٍ يعطي تابعاً أصليّاً للتابع $f : x \mapsto \frac{1}{x^3}$ على المجال $]-\infty,\ 0[$ ؟

أ) لا يوجد، لأنّ الجدول لا يعطي القوى إلّا على $]0,\ +\infty[$

ب) سطر الأُسّ الصحيح الأصغر تماماً من -1 ، فيكون $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$

ج) سطر اللوغاريتم، فيكون $F(x) = \ln(-x)$

ب. نعم. نكتب $f(x) = x^{-3}$ مع $n = -3 \leq -2$ ، فيكون $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$. والاشتقاق يعيدك إلى x^{-3} .

الجمع والضرب بعددٍ ثابت

الجدول وحده لا يكفي، لأنّ ما يُطلب في التمارين ليس سطراً من الجدول بل مجموعُ أسطرٍ ومضاعفاتها. والمبرهنة الآتية تقول إنّ هذين العملين يمرّان من دون مقاومة، تماماً كما يمرّان في الاشتقاق. والسبب واحد: التابع الأصليّ مُعرَّفٌ بالاشتقاق، والاشتقاق خطّيّ. لاحظ ما ليس فيها: لا شيء عن الجداء ولا عن الخارج. لا توجد قاعدةٌ تعطي تابعاً أصليّاً لجداء تابعين من تابعيهما الأصليّين، والدرس الثالث سيأتي بحيلةٍ لبعض الحالات، لا بقاعدةٍ عامّة.

مبرهنة 3

$(F+G)' = f+g$ إذا كان F و G ، بالترتيب، تابعين أصليّين للتابعين f و g على مجال I ، كان $F+G$ تابعاً أصليّاً للتابع $f+g$ على المجال نفسه.

$(\lambda F)' = \lambda f$ إذا كان F تابعاً أصليّاً للتابع f على مجال I ، وكان λ عدداً حقيقيّاً، كان λF تابعاً أصليّاً للتابع λf على المجال نفسه.

الكتاب، الصفحة 204

تذكّر: كيف نجد تابعاً أصليّاً لكثير حدودٍ على $\mathbb{R}$ ؟ يكفي أن نحسب تابعاً أصليّاً لكلّ حدٍّ من حدوده، ثمّ نجمع. هذا كلّ شيء، ولا حالة خاصّة فيه.

الكتاب يحلّ هذا المثال في سطرٍ واحد، ونفصّله لأنّه القالب الذي تُبنى عليه كلّ مسألة كثير حدود. جد تابعاً أصليّاً F للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 3$$

1. تفكيكٌ إلى حدود بالمبرهنة 3 ننتقل من التابع إلى حدوده: تابعٌ أصليّ للمجموع هو مجموع التوابع الأصليّة، والمعامل الثابت يمرّ كما هو. فيصير المطلوب أربعة أسئلةٍ صغيرة، كلٌّ منها سطرٌ من الجدول.

$$x^3, \quad x^2, \quad x, \quad 1$$

2. سطر القوى بأُسٍّ طبيعيّ لكلّ قوّةٍ نرفع الأُسّ واحداً ونقسم على الأُسّ الجديد. والمعاملات مرّت معنا، فنكتب الحدود جاهزة.

$$\begin{aligned} 4x^3 &\longrightarrow x^4 \\ -6x^2 &\longrightarrow -2x^3 \\ 2x &\longrightarrow x^2 \\ -3 &\longrightarrow -3x \end{aligned}$$

3. الجمع نجمع الأربعة فنحصل على تابعٍ أصليّ واحد. وهو ليس الوحيد: كلّ تابعٍ أصليّ آخر للتابع f يختلف عنه بثابتٍ حقيقيّ، كما رأيت في الدرس الأوّل.

$$F(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x$$

4. التحقّق لا تُسلّم جواباً قبل اشتقاقه. هذه هي كلّ الرقابة التي تحتاجها في الدرس كلّه، وهي مجّانيّة.

$$F'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 3 = f(x)$$

في حساب التوابع الأصليّة لديك دائماً تصحيحٌ ذاتيّ: اشتقّ جوابك. إن لم يعد إليك f بالضبط، فالجواب خطأ، ولا حاجة إلى انتظار المصحّح لتعرف.

$$F' = f$$

تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto 6x^2 + \dfrac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ هو:

أ) $2x^3 + \ln x$

ب) $3x^3 + \ln x$

ج) $2x^3 + \ln(-x)$

أ. نعم. الحدّ الأوّل بسطر القوى: $\dfrac{6x^3}{3} = 2x^3$. والحدّ الثاني بسطر اللوغاريتم، وفرعُه هو $\ln x$ لأنّ المجال موجب.

الجدول الثاني، حين يكون هناك تابعٌ داخليّ

الجدول الأوّل ينفع ما دام التابع مألوفاً كما هو. لكنّ ما يُطلب فعلاً يكون غالباً مركّباً: لوغاريتمٌ لكثير حدود، أُسّيٌّ لمربّع، جذرٌ لثلاثيّ حدود. ولا يمكن أن يوجد جدولٌ يسع كلّ تركيب. الموجود شيءٌ أفضل: قاعدة اشتقاق التابع المركّب مقروءةً بالمقلوب. اشتقاق $F(u)$ يعطي $u' \times f(u)$ ، إذن كلّ تابعٍ ظهر فيه العاملُ u' يعود إلى الجدول الأوّل. في كلّ أسطر الجدول الآتي، u تابعٌ اشتقاقيّ على مجال I .

قواعد عامّة مع تابعٍ داخليّ

$f = u'\,u^n \Longrightarrow F = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ عددٌ صحيح لا يساوي -1 . وفي حالة كون $n < -1$ يجب ألّا ينعدم u على I .

$f = \dfrac{u'}{\sqrt{u}} \Longrightarrow F = 2\sqrt{u}$ بشرط $u > 0$ على I . وهو حالةٌ خاصّة من السطر الذي تحته مع $\alpha = -\frac{1}{2}$.

$f = u'\,u^\alpha \Longrightarrow F = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ بشرط $\alpha \notin \{0, -1\}$ و $u > 0$ على I .

$f = \frac{u'}{u} \Longrightarrow F = \ln u$ بشرط $u > 0$ على I .

$f = \frac{u'}{u} \Longrightarrow F = \ln(-u)$ بشرط $u < 0$ على I . السطران خانةٌ واحدة في الكتاب، وفصلناهما هنا كما في الجدول الأوّل.

$f = u'\, e^u \Longrightarrow F = e^u$ من دون شرطٍ على u .

$f = u' \sin u \Longrightarrow F = -\cos u$ من دون شرط، والإشارة السالبة هنا كما في الجدول الأوّل.

$f = u' \cos u \Longrightarrow F = \sin u$ من دون شرط.

الكتاب، الصفحة 205

تذكّر: الأسطر كلّها حالةٌ خاصّة من جملةٍ واحدة يذكرها الكتاب تحت الجدول: إذا كان F تابعاً أصليّاً للتابع f على مجال I ، وكان u تابعاً اشتقاقيّاً على مجال J ويأخذ قيمه في I ، كان $F(u)$ تابعاً أصليّاً للتابع $u' \times f(u)$.
لاحظ المجالين: J للتابع الداخليّ و I للخارجيّ. هذه الجملة هي المكان الوحيد في الدرس الذي يفصل بينهما.

انتبه: لا تخلط الجدولين. الأوّل عن توابع بعينها، ولكلّ سطرٍ فيه عمود مجال. الثاني عن أنماط، ولا عمود مجالٍ فيه أصلاً: المجال يأتي من الجملة التي تسبقه ومن شرط السطر نفسه. وأخطر ما في الثاني أنّ العامل u' يجب أن يكون موجوداً فعلاً. مثلاً $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ ليس من النمط $\dfrac{u'}{u}$ ، لأنّ مشتقّ المقام هو $2x$ وليس 1 . ولا يوجد في هذا الدرس ما يعطي تابعاً أصليّاً لهذا التابع.

هذه الصيغة تحديداً هي التي تلقاها أكثر من غيرها. جد تابعاً أصليّاً F للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = (x-2)(x^2-4x+5)^3$$

1. ما هو u ؟ القوّة تدلّك: ما تحت الأُسّ هو u . اشتقّه ثمّ قارنه بما هو خارج القوس.

$$u(x) = x^2 - 4x + 5$$
$$u'(x) = 2x - 4$$

2. ضبط المعامل المطلوب u' كاملاً، والموجود نصفه، لأنّ $2x - 4 = 2(x-2)$. نضرب ونقسم على 2 ، وهذا هو الضبط الوحيد المسموح: عددٌ ثابت، بالمبرهنة 3 .

$$f(x) = \tfrac{1}{2}\, u'(x)\, \big(u(x)\big)^3$$

3. السطر الأوّل من الجدول الثاني بالسطر $u'u^n$ مع $n=3$: نرفع الأُسّ واحداً ونقسم على الأُسّ الجديد. والشرط $n<-1$ لا يعنينا هنا لأنّ n موجب، فلا حاجة إلى مناقشة انعدام u .

$$F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(u(x)\right)^4}{4}=\frac{1}{8}\left(x^2-4x+5\right)^4$$

4. التحقّق اشتقّ: الأُسّ 4 ينزل، والداخل يعطي $2x-4$ ، فيتبقّى المطلوب بالضبط.

$$F'(x)=\frac{4\left(x^2-4x+5\right)^3(2x-4)}{8}=(x-2)\left(x^2-4x+5\right)^3$$

الضبط بعددٍ ثابتٍ مسموح، والضبط بتابعٍ ممنوع. إن كان الناقص عاملاً ثابتاً فاضرب واقسم به. وإن كان الناقص x أو أيّ تابعٍ آخر، فأنت في السطر الخطأ ولا بدّ من حيلةٍ أخرى.

$$f=\lambda\,u'\,u^n\Longrightarrow F=\lambda\,\frac{u^{n+1}}{n+1}$$

تذكّر: خذ هذا النمط بجدّيّة: دورة 2025 من البكالوريا كانت كلّها اختياراً من متعدّد، وجاء سؤالها الثلاثون بعشرين درجة على جداءِ عاملٍ من الدرجة الأولى في قوّةٍ لثلاثيّ حدود، أي على نمط مثال الكتاب نفسه. (صورة ذلك البند عندنا غير واضحة تماماً، والنمط مقروء أمّا الأُسّ فمستنتَج بالحساب.) معنى الطلب هناك يأتي في الدرس التالي، أمّا الحساب الذي يقوم عليه فهو هذا السطر بعينه.

تابعٌ أصليّ للتابع $f:x\mapsto\dfrac{2x-1}{x^2-x+3}$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) $\ln(2x-1)$

ب) $2\ln\left(x^2-x+3\right)$

ج) $\ln\left(x^2-x+3\right)$

ج. نعم. مشتقّ المقام هو $2x-1$ وهو البسط بعينه، فالنمط $\dfrac{u'}{u}$. ومميّز المقام $1-12=-11$ سالب، فالمقام موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ، والفرع المأخوذ هو $\ln u$.

الحيل التي تُرجعك إلى الجدول

ما تقدّم يكفي متى كان التابع على صورة سطرٍ من الجدولين. وأكثر ما يُعطى ليس كذلك في ظاهره، ويصير كذلك بعد خطوةٍ واحدة. الخطوات المستعملة ثلاث، وقد رأيت إحداها: ضبط المعامل الثابت. تبقى اثنتان: القسمة، متى لم تكن درجة البسط أصغر من درجة المقام، والدساتير المثلّثاتيّة، متى ظهرت قوّةٌ لجيبٍ أو تجيب أو جداءُ اثنين منهما.

بسط هذا الكسر من الدرجة الأولى ومقامه من الدرجة الأولى، فلا هو سطرٌ من الجدول الأوّل ولا هو من النمط $\dfrac{u'}{u}$. جد تابعاً أصليّاً F للتابع f على المجال $]1,\,+\infty[$.

$$f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$$

1. لماذا لا يصلح السطر $\dfrac{u'}{u}$ لو وضعنا $u(x)=x-1$ لكان $u'(x)=1$، بينما البسط هو $2x+1$. والزائد $2x+1$ ليس عدداً ثابتاً فلا يمكن إخراجه. إذن القسمة أوّلاً.

$$\begin{aligned} u(x)&=x-1\\ u'(x)&=1 \end{aligned}$$

2. القسمة نكتب البسط بدلالة المقام. من $x=1+u(x)$ يأتي $2x+1=2\,u(x)+3$، فينفصل الكسر إلى حدّين: عددٍ ثابت ونمطٍ نعرفه.

$$\begin{aligned} f(x)&=\frac{2\,u(x)+3}{u(x)}\\ &=2+3\,\frac{u'(x)}{u(x)} \end{aligned}$$

3. كلّ حدٍّ إلى سطره الحدّ الثابت 2 يعود إلى السطر الأوّل من الجدول الأوّل، والحدّ الثاني إلى سطر $\dfrac{u'}{u}$. و $u(x)=x-1$ موجبٌ تماماً على $]1,\,+\infty[$، فالفرع المأخوذ هو $\ln u$ لا $\ln(-u)$.

$$F(x)=2x+3\ln(x-1)$$

4. التحقّق نشتقّ ونعيد التوحيد على مقامٍ واحد، فنصل إلى f بالضبط.

$$F'(x)=2+\frac{3}{x-1}=\frac{2(x-1)+3}{x-1}=\frac{2x+1}{x-1}$$

متى كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام أو مساويةً لها، فالخطوة الأولى قسمة، لا بحثٌ عن سطر. وإذا كان المقام من الدرجة الأولى، صار الباقي بعد القسمة من النمط $\dfrac{u'}{u}$ مضروباً بعدد.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cx+d}$$

ليس في الجدولين سطرٌ لمربّع الجيب، ولن يكون. الحيلة أن نُنزل القوّة بدستورٍ مثلّثاتيّ قبل أن نبحث عن سطر.

جد تابعاً أصليّاً F للتابع f على $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \sin^2 x$$

1. إنزال القوّة من الدستور $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ نستخرج مربّع الجيب. النتيجة مجموعٌ من حدّين: عددٍ ثابت وتجيبٍ لضعف الزاوية، وكلاهما في الجدول.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

2. السطر الأخير من الجدول الأوّل التجيب هنا ليس $\cos x$ بل $\cos 2x$ ، أي $g(ax+b)$ مع $a = 2$ و $b = 0$. فالتابع الأصليّ هو $\sin 2x$ مقسوماً على a .

$$\cos 2x \longrightarrow \frac{1}{2}\sin 2x$$

3. التجميع الحدّ الثابت $\frac{1}{2}$ يعطي $\frac{x}{2}$ ، والحدّ الثاني يعطي $-\frac{1}{2}$ مضروباً بما وجدناه.

$$F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

4. التحقّق الاشتقاق يعيد الدستور نفسه بالاتّجاه المعاكس، فنعود إلى مربّع الجيب.

$$F'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2\cos 2x}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x = \sin^2 x$$

كلّما ظهرت قوّةٌ زوجيّة لجيبٍ أو تجيب، أو جداءُ جيبٍ في تجيب، أنزل القوّة أوّلاً بالدساتير، ثمّ عامل كلّ حدٍّ بسطر $g(ax+b)$. ولا تنسَ العامل $\frac{1}{a}$ ، فهو أكثر ما يسقط سهواً.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

تذكّر: لم يغب التكامل عن أيّ دورةٍ حديثة قرأناها، إحدى عشرة من إحدى عشرة، وتراوح وزنه بين 10 درجات و 105 من أصل 600 . لكنّ ما استُعمل من هذين الجدولين قليلٌ على كلّ حال: كثيرات الحدود، و $\frac{1}{x}$ ، و $\frac{u'}{u}$ ، و $u'u^n$ ، و e^{ax} ، و $\cos(ax)$. ولم نجد في تلك الدورات ولا مرّةً واحدة $\frac{1}{\cos^2 x}$ ولا $\frac{1}{\sin^2 x}$. احفظ الجدولين كاملين لأنّهما قصيران، لكن تدرّب على هذه الستّة.

تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \cos 5x$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) $\frac{1}{5}\sin 5x$

ب) $\sin 5x$

ج) $-\frac{1}{5}\sin 5x$

أ. نعم. بسطر $g(ax+b)$ مع $a=5$: التابع الأصليّ للتجيب هو الجيب، مقسوماً على 5 . واشتقاق جوابك يعطي $\frac{1}{5}\times 5\cos 5x = \cos 5x$.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 203 إلى 207 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.