الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التكامل المحدّد وحساب المساحة

هنا يصير العدد مساحةً، وهنا وحده يتكرّر سؤال البكالوريا بحرفه

التكامل والتوابع الأصليّة . الوحدة 7 . الدرس 4

درسان لم يكن فيهما تكاملٌ أصلاً، بل توابعُ أصليّة وحدها، ثمّ درسٌ صار التكامل فيه عدداً، فرقَ قيمتين لتابعٍ أصليّ. وهنا يصير شيئاً تراه: مساحةَ سطحٍ بين خطٍّ بيانيّ ومحور الفواصل. وهذا الدرس هو الوحيد في الوحدة الذي وجدنا لسؤاله في الدورات قالباً ثابتاً يتكرّر بحرفه، وفيه دائماً بالترتيب نفسه: تدرس التابع، ترسم خطّه، ثمّ تُسأل عن المساحة. لذلك ابدأ من هنا إن كان وقتك قصيراً. وقبل المساحة نحتاج خاصّةً واحدة صغيرة: التكامل يحفظ الترتيب.

التكامل يحفظ الترتيب

حتّى الآن كان التكامل يُحسب. الآن يُقارَن. والفكرة بسيطة إلى حدّ أنّها تكاد تُنسى: إذا كان تابعٌ أكبر من آخر على مجال، فتكامله أكبر. والبرهان سطران، ويستعمل ما تعرفه من وحدة الاشتقاق: تابعٌ مشتقُّه موجب هو تابعٌ متزايد.

مبرهنة 8

الفرض: ليكن f و g تابعين مستمرّين على مجال I ، وليكن a و b عددين من I . لاحظ الشرط $a < b$ في السطرين، فهو ليس زينة.

① إذا كان $a < b$ ، وكان $f \geq 0$ على المجال $[a,\, b]$ ، كان $\int_a^b f \geq 0$. $f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geq 0$

② إذا كان $a < b$ ، وكان $f \geq g$ على المجال $[a,\, b]$ ، كان $\int_a^b f \geq \int_a^b g$. $f \geq g \Longrightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$

وهي ① مطبَّقةً على الفرق $f - g$.

الكتاب، الصفحة 217

انتبه: هذا هو الخطأ الوحيد الذي يذكره الكتاب صراحةً في صفحة أخطاء الوحدة كلّها، فخذه بجدّيّة: الخاصّتان تشترطان $a < b$. من يستنتج من $f \geq g$ أنّ $\int_a^b f \geq \int_a^b g$ من دون أن يفحص ترتيب الحدّين يخطئ، لأنّ تبديل الحدّين يقلب الإشارة ومعها المتراجحة. رتّب الحدّين أوّلاً، ثمّ اقرأ الإشارة.

وهذا أجمل ما في الدرس: ثلاث متراجحات مثلّثاتيّة تخرج واحدةً من الأخرى، وكلّ خطوةٍ تستعمل المبرهنة 8 على ما أثبتته الخطوة السابقة. أثبت أنّه عند $0 \leq b$ تتحقّق المتراجحات الثلاث.

$$\sin b \le b$$
$$1 - \frac{b^2}{2} \le \cos b$$
$$b - \frac{b^3}{6} \le \sin b$$

1. نقطة البداية، وهي معلومة نبدأ من شيءٍ تعرفه منذ سنوات: التجيب لا يتجاوز الواحد أبداً. نكامل الطرفين على $[0,\ b]$ بالمبرهنة ⑧ ②، والتابعان مستمرّان والحدّان مرتّبان.

$$\int_0^b \cos t\,dt \le \int_0^b 1\,dt$$

2. المتراجحة الأولى نحسب الطرفين: تابعٌ أصليّ للتجيب هو الجيب، وللواحد هو t . فتخرج المتراجحة الأولى في سطر.

$$\sin b \le b$$

3. الحيلة: ما أُثبت يصير مُكامَلاً الآن نستعمل ما أثبتناه للتوّ كنقطة بداية جديدة: $\sin t \le t$ على $[0,\ b]$. نكامل مرّةً ثانية.

$$\int_0^b \sin t\,dt \le \int_0^b t\,dt$$
$$1 - \cos b \le \frac{b^2}{2}$$

4. وثالثةً، بالحيلة نفسها من الخطوة السابقة $1 - \cos t \le \frac{t^2}{2}$ على $[0,\ b]$. نكامل مرّةً ثالثة، وتخرج المتراجحة الثالثة.

$$\int_0^b (1 - \cos t)\,dt \le \int_0^b \frac{t^2}{2}\,dt$$
$$b - \sin b \le \frac{b^3}{6}$$

لهذه الحركة اسمٌ عند غير هذا الكتاب، ووصفها أهمّ من اسمها: تُثبت متراجحةً بسيطة، ثمّ تكاملها لتحصل على أدقّ منها، ثمّ تكرّر. كلّ خطوةٍ تكسب أُسّاً. والشرط في كلّ مرّة واحد: الحدّان مرتّبان والتابعان مستمرّان.

$$f \le g \ ,\ a < b \implies \int_a^b f \le \int_a^b g$$

علمنا أنّ $f \geq g$ على $[1, 5]$. أيّ استنتاجٍ صحيح؟

أ) $\int_5^1 f \geq \int_5^1 g$

ب) $f \geq g$ على $\mathbb{R}$ كلّها

ج) $\int_1^5 f \geq \int_1^5 g$

ج. نعم، والشرطان محقّقان: $1 < 5$ والتابعان مُقارَنان على المجال نفسه. هذه هي المبرهنة ⑧ ② حرفيّاً.

حين يكون التابع موجباً

الآن الخطوة التي ينتظرها الدرس كلّه. حتّى هنا كان $\int_a^b f$ عدداً، فرقَ قيمتين، بلا معنًى هندسيّ. المبرهنة الآتية تعطيه معنى: هو المساحة. لكنّها تشترط شرطين، وكلاهما ضروريّ: الحدّان مرتّبان، والتابع لا ينزل تحت المحور.

مبرهنة ⑨

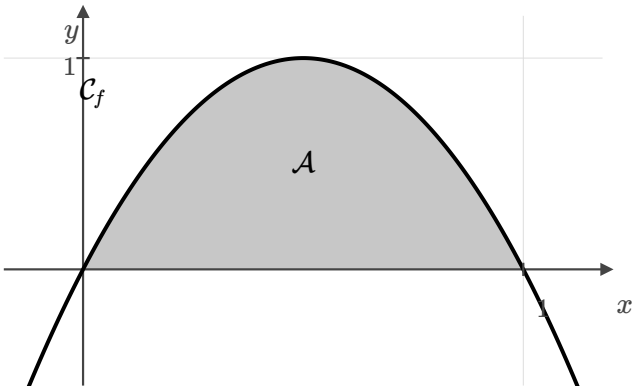
الفرض: f مستمرٌّ على مجال I ، و a و b عددان من I مع $b > a$ ، و $f \geq 0$, $b > a$.

عندئذٍ يساوي $\int_a^b f$ مساحة السطح المحصور بين محور الفواصل، والخطّ البياني $\mathcal{C}_f$ ، والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = a$ و $x = b$.

$\int_a^b f = \mathcal{A}$

الكتاب، الصفحة 218

تذكّر: الكتاب يبرهن هذه المبرهنة ويكتب فوق برهانها «يُترك لقراءةٍ ثانية». والسبب وجيه: البرهان يفترض أنّ المساحة موجودة وأنّها تُجمع على الأجزاء، وهذان أمران لا يُعرَّفان في هذا الكتاب. فهو يبني الجسر من الطرف الآخر، ولا يدّعي غير ذلك.



التابع $f : x \mapsto 4x(1-x)$ موجبٌ على $[0,\,1]$ وينعدم عند طرفيه. المساحة الملوّنة هي $\mathcal{A}$ ، وهي بالمبرهنة 9 تساوي $\int_0^1 f$. لاحظ أنّ الخطّ يتابع سيره خارج المجال، والمساحة لا تتبعه: المجال هو الذي يحدّها.

المثال الأوّل للمساحة، وهو الأبسط في الوحدة كلّها. يتقاطع الخطّ البياني للتابع $f : x \mapsto 4x(1-x)$ مع محور الفواصل عند $x = 0$ و $x = 1$. عيّن مساحة السطح المحدود المحصور بين الخطّ ومحور الفواصل.

$$f(x) = 4x(1-x)$$

1. افحص الإشارة أوّلاً قبل أيّ حساب: هل التابع موجب على المجال؟ بين الصفرين 0 و 1 يكون $x > 0$ و $1 - x > 0$ ، فالجداء موجب. الشرط الثاني للمبرهنة 9 محقّق، والحدّان مرتّبان.

$$\forall x \in \,]0,\,1[\,:\, f(x) > 0$$

2. افتح القوس ثمّ كامِل الجداء ليس سطراً من الجدول، فنفتحه أوّلاً. ثمّ حدّاً حدّاً بسطر القوى.

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^1 \left(4x - 4x^2\right) dx \\ &= \left[2x^2 - \tfrac{4}{3}x^3\right]_0^1\end{aligned}$$

3. عوّض بالحدّين عند 1 يعطي القوس $2 - \dfrac{4}{3}$ ، وعند 0 يعطي صفراً. والجواب موجب، كما يجب لمساحة.

$$\mathcal{A} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

الترتيب في كلّ مسألة مساحة: افحص الإشارة، تأكّد من ترتيب الحدّين، ثمّ كامِل. من يبدأ بالمكاملة قبل فحص الإشارة يحصل أحياناً على عددٍ سالب، والمساحة لا تكون سالبة أبداً.

$$f \geq 0 \;,\; b > a \;\Longrightarrow\; \mathcal{A} = \int_a^b f$$

التابع f مستمرٌّ وموجب على $[2,\,5]$ ، و $\int_2^5 f = 12$. ما مساحة السطح بين $\mathcal{C}_f$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x=2$ و $x=5$ ؟

أ) 12

ب) $\dfrac{12}{3} = 4$

ج) 36

أ. نعم، والشرطان محقّقان: $5 > 2$ و $f \geq 0$. المبرهنة 9 تقول إنّ العدد نفسه هو المساحة، بلا معامل وبلا تحويل.

تحت المحور، والحالة العامّة

بقي السؤال الذي يقفز إلى الذهن فوراً: وإذا كان الخطّ تحت المحور؟ التكامل عندئذٍ سالب، والمساحة لا تكون سالبة. الكتاب يجيب على ثلاث مراحل، وهي أنظف ما في الدرس بناءً.

نتيجة 10، ثمّ نتيجة 11

المرحلة الأولى، النتيجة 10 على الصفحة 219 : إذا كان $b > a$ و $f \leq 0 \Longrightarrow \mathcal{A} = \int_a^b (-f)$ على $[a,\,b]$ ، فالمساحة هي تكامل معاكس التابع. والسبب أنّ $\mathcal{C}_{-f}$ هو صورة $\mathcal{C}_f$ بالتناظر بالنسبة إلى محور الفواصل، والتناظر لا يغيّر المساحة.

المرحلة الثانية، النتيجة 11 على الصفحة 220 : بفرض $b > a$ وحده، بلا أيّ شرطٍ على إشارة f . هذه الصيغة تجمع الحالتين، لأنّ $|f|$ موجبٌ دائماً. $\mathcal{A} = \int_a^b |f|$

المرحلة الثالثة، وهي طريقة الحساب لا صيغة جديدة: إذا غيّر التابع إشارته، نستعين بعلاقة شال ونقطع عند كلّ صفر، ثمّ نحسب كلّ قطعةٍ وحدها ونجمع. الكتاب لا يحسب أبداً وبداخل التكامل قيمةٌ مطلقة؛ القيمة المطلقة كتابة، والتقطيع حساب. $\int_a^b |f| = \int_a^c |f| + \int_c^b |f|$

الكتاب، الصفحة 219

تذكّر: وهنا التمييز الذي يحمل الدرس كلّه، ويسمّيه الكتاب باسمه: $\int_a^b f$ هو «قياسٌ جبريّ» للمساحة، أي مساحةٌ بإشارة، موجبةٌ فوق المحور وسالبةٌ تحته، والمجموع جبريّ. أمّا $\int_a^b |f|$ فهو «المساحة الفعليّة». إن سُئلت عن «التكامل» فالجواب الأوّل، وإن سُئلت عن «المساحة» فالجواب الثاني، والفرق بينهما ليس تفصيلاً بل سؤالان مختلفان.

انتبه: لا تكتب مساحةً سالبة أبداً. إن خرج تكاملك سالباً وكان المطلوب مساحة، فالتابع ينزل تحت المحور في مكانٍ ما، والخطأ ليس في الحساب بل في أنّك لم تقطّع. ارجع إلى الإشارة، جد الأصفار داخل المجال، واقطع عندها.

التابع f سالبٌ على $[1,\,3]$ و $\int_1^3 f = -5$. ما مساحة السطح بينه وبين محور الفواصل على هذا المجال؟

أ) -5

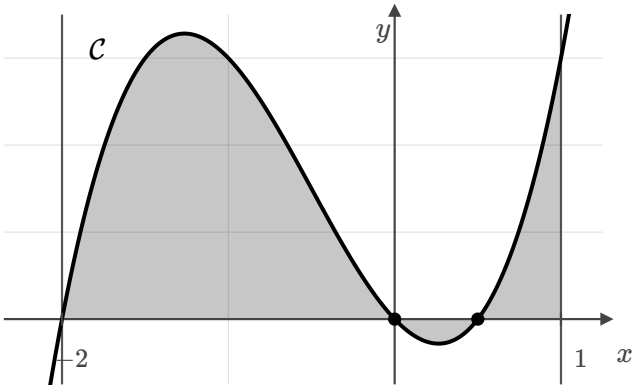
ب) لا يمكن تعيينها من دون معرفة f

ج) 5

ج. نعم. بالنتيجة 10 المساحة هي $\int_1^3 (-f)$ ، وهي معاكس $\int_1^3 f$ بخطّيّة التكامل، أي 5 .

الحساب كاملاً، بتغيّر الإشارة

بقي أن نرى الأمر كلّه في مسألةٍ واحدة. هذا مثال الكتاب الأخير، وهو أصعب حالةٍ في الدرس: تابعٌ يغيّر إشارته داخل المجال، فيلزم التقطيع. 🚨 واعلم أنّ الدورة أرحم من الكتاب هنا. في كلّ دورةٍ قرأناها يأتي قبل سؤال المساحة بندٌ يطلب دراسة وضع الخطّ من المحور أو من مستقيم، فتصل إلى المساحة والإشارة معروفةٌ لك، ولم نجد ولا مرّةً واحدة سؤال مساحةٍ احتاج إلى تقطيعٍ عند صفرٍ داخليّ. تعلّم القالب كاملاً هنا، فهو الذي يجعل الحالة الأسهل بديهيّة.



الخطّ البياني للتابع $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 2x$ على $[-2,\,1]$. النقطتان المعلَّمتان هما الصفران الداخليّان 0 و $\frac{1}{2}$. لاحظ أنّ التلوين ينزل تحت المحور بينهما: المطلوب $\int |f|$ ، لا $\int f$.

ليكن $\mathcal{C}$ الخطّ البياني للتابع $f : x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 2x$. احسب $\mathcal{A}$ ، مساحة السطح المحصور بين $\mathcal{C}$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = -2$ و $x = 1$.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x$$

1. حلّل، وادرس الإشارة أوّل خطوة دائماً: أين ينعدم التابع داخل المجال؟ نُخرج x عاملاً مشتركاً ثمّ نحلّل ثلاثيّ الحدود. الأصفار هي -2 و 0 و $\frac{1}{2}$ ، واثنان منها داخل المجال.

$$f(x) = x(x+2)(2x-1)$$

2. جدول الإشارة، بلا جدول ثلاثة عوامل، فالإشارة تنقلب عند كلّ صفر. بالتعويض بقيمةٍ واحدة في كلّ قطعة: $f(-1) = 3 > 0$ ، و $f\left(\frac{1}{4}\right) < 0$ ، و $f(1) = 3 > 0$.

$$f \geq 0 \ : \ [-2,\, 0] \ , \ \left[\tfrac{1}{2},\, 1\right]$$
$$f \leq 0 \ : \ \left[0,\, \tfrac{1}{2}\right]$$

3. اقطع، واقلب في الوسط بعلاقة شال نقطع عند الصفرين الداخليّين. القطعة الوسطى وحدها تحتاج معاكس التابع، لأنّ التابع سالبٌ هناك.

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} f + \int_{0}^{\frac{1}{2}} (-f) + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f$$

4. تابعٌ أصليّ واحد يكفي للقطع الثلاث لا حاجة إلى ثلاثة حسابات منفصلة: تابعٌ أصليّ واحد يخدم القطع كلّها، ونعوّض به عند الحدود الأربعة.

$$F(x) = \frac{x^4}{2} + x^3 - x^2$$

5. التعويض والجمع القيم هي $F(-2) = -4$ و $F(0) = 0$ و $F\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{32}$ و $F(1) = \frac{1}{2}$. القطع تعطي 4 و $\frac{3}{32}$ و $\frac{19}{32}$.

$$\mathcal{A} = 4 + \frac{3}{32} + \frac{19}{32} = \frac{75}{16}$$

خمس حركات: حلّل، ادرس الإشارة، اقطع عند الأصفار الداخليّة، اقلب التابع في القطع السالبة، ثمّ اجمع. من ينسى حركةً واحدة يخرج بالقياس الجبريّ بدل المساحة، وهو أصغر منها دائماً. فإن غلبت القطع السالبة خرج جوابك سالباً ونبّهك، وإن لم تغلب خرج موجباً ولم ينبّهك شيء، وهنا الخطر. لذلك اقرأ الإشارة قبل أن تحسب، لا بعده.

$$\mathcal{A} = \int_{a}^{b} |f|$$

تذكّر: وكلمةٌ عن الوزن، وهي الأهمّ في الوحدة كلّها. هذا الدرس هو الوحيد فيها الذي وجدنا لسؤاله قالباً ثابتاً يتكرّر بحرفه: خمسٌ من إحدى عشرة دورةٍ حديثة تطلب مساحةً في آخر مسألة الدرس، بعد الدراسة والرسم، بعشر درجاتٍ إلى خمس عشرة. وهي دائماً بين خطٍّ ومحورٍ أو بين خطٍّ ومستقيم، لا بين خطّين. ولا يعني هذا أنّ بقيّة الوحدة بلا درجات: أثقل مواضع التكامل في الدورات كلّها ليست مساحةً بل حساب تكاملٍ صريح، وموضعها الدرس السابق. لكن تلك تتبدّل صيغتها من دورةٍ إلى دورة، وهذه لا تتبدّل. ولاحظ الترتيب: الرسم يسبق المساحة دائماً، لأنّ الرسم هو الذي يريك أين تنقلب الإشارة.

تذكّر: وأخيراً حالةٌ لا يعالجها هذا الدرس، لكنّك ستلقاها في تمارين الكتاب: المساحة بين خطّين بيانيَّين. الصيغة $\int_a^b |f-g|$ ، والطريقة هي نفسها تماماً: ادرس إشارة الفرق $f-g$ ، اقطع عند تقاطع الخطّين، واجمع. والكتاب يضع هذه الصيغة في نشاطٍ خارج الدرس، ويبدأها بكلمة «نقبّل»، أي إنّه لا يبرهنها. ولم نجد لها أثراً في الدورات التي قرأناها، فاعرفها ولا تُنفق عليها وقت التدرّب.

تابعٌ f ينعدم عند $x=3$ وحدها داخل $[1,\,6]$ ، وهو موجبٌ قبلها وسالبٌ بعدها. ما مساحة السطح بينه وبين المحور على $[1,\,6]$ ؟

أ) $\int_1^6 f$

ب) $\int_1^3 f - \int_3^6 f$

ج) $\int_1^3 f + \int_3^6 f$

ب. نعم. القطعة الأولى موجبة فتُؤخذ كما هي، والثانية سالبة فتُؤخذ بمعاكسها، و $\int_3^6 f = \int_3^6 (-f)$. هذا هو $\int_1^6 |f|$ محسوباً.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 217 إلى 220 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.