الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

نهاية تابع مركّب

حين يجلس تابع داخل تابع: ننقل النهاية من الداخل إلى الخارج بتغيير المتحوّل

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 5

قواعد العمليّات على النهايات تكفي للجمع والجداء والقسمة. لكنّ كثيراً من توابع الا
تابع آخر، مثل $\sqrt{x^2-x+1}$ أو $\cos\frac{1}{x}$. لهذه التوابع أداة واحدة، وهي ب
إلى أين وصل، ثمّ نسأل التابع الخارجي عمّا يفعله هناك. الترتيب هو كلّ شيء، والكت
تغيير المتحوّل، وهي التي تنقذ الحالات التي تعجز فيها القواعد المعتادة.

تابعٌ داخل تابع

انظر إلى $f(x)=\sqrt{x^2-x+1}$. ليس هنا جمعٌ بين تابعين معروفين، ولا
على النهايات لما وجدت ما تطبّقها عليه، فالتابع ليس مؤلّفاً من قطعتين متجاورتين

فكّك ما تراه بالطريقة التي تحسب بها فعلاً على الآلة الحاسبة. المرحلة الأولى: تحس
$h(x)=x^2-x+1$ التربيعي للناتج. سمِّ ناتج المرحلة الأولى X ، فيصير
نسمّي h التابع الداخلي و g التابع الخارجي.

$$) = g(X) = g\big(h(x)\big) = (g\circ h)(x)$$

هذا التفكيك ليس زينةً في الدفتر. هو الطريق المنظّم لحساب نهاية f : لا نستطيع
نسأل عن كلّ مرحلة على حدة.

تذكّر: كلّ تابع مركّب يُقرأ من الداخل إلى الخارج: x يدخل في h ، وناتج h يدخل
$g\circ h$ و $h\circ g$ ليسا الشيء نفسه.

نريد تفكيك التابع $f(x)=\sqrt{3x-1}$ إلى $g\circ h$. ما التابع الداخلي
أ) $h(x)=\sqrt{x}$
ب) $h(x)=3x-1$
ج) $h(x)=3x$

ب. صحيح. نضع $X=3x-1$ ، فيصير $f(x)=\sqrt{X}$ ، وهذا هو التفكيك

كيف تعبر النهاية من الداخل إلى الخارج

الآن السؤال الحقيقي: إذا عرفنا إلى أين يسعى المقدار الداخلي، وعرفنا ماذا يفعل الت
الجواب نعم، والكتاب يقبل هذه المبرهنة من دون إثبات ويبني عليها الدرس كلّه.

طبّقها على مثالنا عند $+\infty$. المقدار الداخلي $h(x)=x^2-x+1$ يك
إذن المتحوّل الجديد X نفسه يسعى إلى $+\infty$. وهنا وحده نسأل التابع الخار
$+\infty$ ؟ من النهايات المرجعيّة نعرف أنّها $+\infty$.

$$+\infty, \qquad \lim_{X\to+\infty}\sqrt{X}=+\infty \implies \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x}$$

التابع الخارجي $g(X)=\sqrt{X}$ وحده. قيمه تكبر بلا حدّ كلّما كبر X ، وهذا كلّ ما نحتاج

مبرهنة 4

$f=g\circ h, \qquad f(x)=g\big(h(x)\big)$ ثلاثة توابع f و g و h ، والم

$\lim_{x\to a}h(x)=b$ بدايةً: إلى أين يسعى المقدار الداخلي حين تسعى x إلى

$\lim_{t\to b}g(t)=c$ ثمّ: ماذا يفعل التابع الخارجي عند b بالذات، لا عند a ؟

$\lim_{x\to a}f(x)=c$ النتيجة، وهي صحيحة سواءٌ أكانت a و b و c أعدا

الكتاب، الصفحة 37

انتبه: الترتيب هو كلّ شيء، والكتاب يكتبه بلون مميّز: بدايةً $b=\lim_{x\to a}h(x)$

عند a يكون قد سأل التابع الخارجي عن مكان لا يمرّ به أصلاً. في $\cos\frac{1}{x}$ عند ∞

$+\infty$ ، لأنّ الزاوية التي تصله هي $\frac{1}{x}$ وهي تسعى إلى الصفر.

تذكّر: العدد الوسيط b هو حلقة الوصل. اكتبه صراحةً على ورقتك في سطر مستقلّ.

المبرهنة لا تخصّ اللّانهاية وحدها

المثال الثاني في الكتاب يعمل عند عدد حقيقي، لا عند اللّانهاية، والطريقة نفسها. التا

$\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ ، والمطلوب نهايته حين تسعى x إلى $\frac{1}{3}$.

نضع $X=h(x)=3x-1$ ، فيكون التابع الخارجي $g(X)=\dfrac{1}{\sqrt{X}}$

يسعى $3x-1$ إلى 0 ، فـ $b=0$. ثمّ التابع الخارجي عند 0 : ونعلم أنّ ∞

$+\infty$.

$$\lim_{X\to 0}\frac{1}{\sqrt{X}}=+\infty \implies \lim_{x\to\frac{1}{3}}\frac{1}{\sqrt{3x-1}}=+\infty$$

انتبه: انتبه إلى دور مجموعة التعريف في هذا المثال. على المجال $\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$ يكون

الصفر يحدث من اليمين وحده، وهذا ما يجعل $\dfrac{1}{\sqrt{X}}$ ذا معنى. من أهمل المجال

التابع $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ معرّف على $]-1,1[$. ما نهايته عند 1 ؟

أ) 0

ب) 1

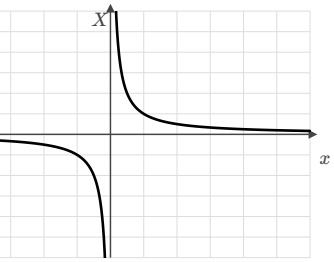
ج) $+\infty$

ج. صحيح. على $]-1,1[$ يكون $X=1-x^2$ موجباً ويسعى إلى 0 ، و ∞

تغيير المتحوّل

حين نكتب $X=h(x)$ ثمّ $f(x)=g(X)$ نقول إنّنا غيّرنا المتحوّل. الا
الحقيقة ليس إلّا تركيب تابعين وقراءة المبرهنة السابقة بالاتّجاه المفيد: بدل أن ندر
النهاية معروفة.

وأنفع تغيير في الوحدة كلّها هو $X=\frac{1}{x}$ ، لأنّه يبدّل الصفر باللّانهاية. حين تكبر x
موجبة، وحين تمضي x نحو $-\infty$ يسعى مقلوبها إلى 0 بقيم سالبة. والطر



التابع المساعد $h(x)=\frac{1}{x}$. كلّما ابتعدنا يميناً اقترب X من 0 بقيم موجبة، وكلّما ابتعدنا ي

تغيير المتحوّل وفق مقلوب المتحوّل

$X=\frac{1}{x}$ المتحوّل الجديد، أي التابع الداخلي $h(x)=\frac{1}{x}$.

$x\to+\infty \implies X\to 0^+$ دراسة النهاية عند $+\infty$ تصير دراسةً عند

$x\to-\infty \implies X\to 0^-$ ودراسة النهاية عند $-\infty$ تصير دراسةً عند

$x\to 0^+ \implies X\to+\infty$ والاتّجاه معكوس أيضاً: من الصفر من اليمين

$x\to 0^- \implies X\to-\infty$ ومن الصفر من اليسار إلى $-\infty$. أربع طرق
النهاية معروفة.

الكتاب، الصفحة 38

انتبه: إذا وصلتَ إلى الشكل $0\times(+\infty)$ فلا تفكّ الجداء إلى نهايتين. قواعد العم
التعيين الأربع. الطريقان المفتوحان هما تغيير المتحوّل ومبرهنات المقارنة، لا القسمة

مثال محلول: الجداء الذي يعاند

نجمع الآن كلّ ما سبق في مثال الكتاب نفسه. اقرأ الخطوة، احسبها على ورقتك، ثمّ
فالمقصود أن ترى بعينك أين تتوقّف.

التابع f معرّف على الأعداد الحقيقية غير المعدومة بالعلاقة أدناه. المطلوب نر

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

1. نجرّب القواعد المعتادة العامل الأوّل x يكبر بلا حدّ. والعامل الثاني $\sin\frac{1}{x}$ ن
وجيب الصفر هو 0 .

$$= +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$$

2. نتوقّف عند صيغة عدم التعيين الجداء إذن من الشكل $0 \times (+\infty)$ ، وهذ
هنا جواباً، ولا يجوز أن نكتب 0 بحجّة أنّ أحد العاملين يسعى إلى الصفر.

$$(+\infty) \times 0$$

3. نغيّر المتحوّل نضع $X = \frac{1}{x}$ ، فيكون $x = \frac{1}{X}$. وحين تسعى x إلى ∞+
b .

$$= \frac{1}{x}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

4. نعيد كتابة التابع بالمتحوّل الجديد نعوّض x بـ $\frac{1}{X}$ و $\frac{1}{x}$ بـ X ، فيصير الح

$$= \frac{1}{X}\sin X = \frac{\sin X}{X} = g(X)$$

5. نقرأ النهاية في المكان الجديد نهاية $\frac{\sin X}{X}$ حين يسعى X إلى الصفر معروفة

$$\lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

6. نُرجع النتيجة إلى المتحوّل الأصلي بحسب المبرهنة، نهاية المركّب عند $+\infty$
1 ، لا 0 .

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$$

حين يعاند الجداء عند الشكل $0 \times \infty$ ، اسأل نفسك: أيّ متحوّل جديد ينقل المس
الجواب غالباً $X = \frac{1}{x}$.

$$\sin\frac{1}{x} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$$

قارن النتيجتين جنباً إلى جنب: $\lim_{x\to+\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$ بينما $\sin\frac{1}{x} = 1$
التي يصغر بها الجيب، فيتوازنان عند 1 . هذا التوازن هو بالضبط ما يضيع حين يُغفل

لماذا العدد المشتقّ نهاية

يختم الكتاب الدرس بتطبيق يبدو بعيداً عنه، وهو في صميمه، ويُسأل في البكالوريا كث

تذكّر التعريف الذي تعرفه من قبل: التابع f اشتقاقي عند a إذا كان للتابع $\frac{(a)}{}$
الصفر، وعندئذ نسمّي هذه النهاية $f'(a)$. لاحظ أنّ المتحوّل هنا هو h ، وأنّ ا

والآن انظر إلى التابع الذي يظهر في الامتحان: $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. ضع
$t(x-a) = g(x)$ ، فيكون $g = t \circ h$ بالضبط. المقدار الداخلي a +
ونهاية t عند الصفر هي $f'(a)$.

$$t(h) = f'(a) \implies \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

تذكّر: هذه النتيجة تُطلب في البكالوريا بصيغتها المقلوبة: تُعطى نسبة من الشكل $\frac{\cdots}{\cdots}$ والجواب ليس حساباً بل تعرّفاً: هو العدد المشتقّ $f'(a)$.

ما نهاية هذا التابع عند $+\infty$ ؟

$$f(x) = \cos\frac{1}{x}$$

أ) 1

ب) 0

ج) لا وجود لها، لأنّ جيب التمام متأرجح

أ. صحيح. المقدار الداخلي $\frac{1}{x}$ يسعى إلى 0 ، فـ $b = 0$ ، و $\lim_{X \to 0} \cos X = 1$

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 37 إلى 39 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.