الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

نهاية تابع عند اللّانهاية

حين تستقرّ قيم التابع حول عدد ثابت، ويظهر المقارب الأفقي

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 1

حتى الآن كان السؤال: كم يساوي التابع عند عدد معيّن. في هذا الدرس نسأل سؤالاً من نوع آخر: ماذا يحدث لقيم التابع حين نمضي بعيداً جدّاً على محور الفواصل، يميناً أو يساراً. يكون الجواب أحياناً عدداً ثابتاً تتجمّع القيم حوله، وعندها يظهر مستقيم يقترب منه الخطّ البياني بلا حدّ كلّما ابتعدنا: المقارب الأفقي. هذا السؤال هو أوّل سطر في كلّ مسألة تحليل في البكالوريا.

ماذا يحدث بعيداً جدّاً

في الدروس السابقة كنّا نُعطي x قيمة ونحسب $f(x)$. الآن نغيّر السؤال: لا نريد قيمة واحدة، بل نريد أن نعرف إلى أين تتّجه قيم $f(x)$ حين نمضي بـ x بعيداً على محور الفواصل، من دون أن نتوقّف عند حدّ.

خذ التابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وجرّب بنفسك. عند $x = 10$ يكون $f(x) = 0.1$ ، وعند $x = 1000$ يكون $f(x) = 0.001$ ، وعند $x = 1000000$ يكون $f(x) = 0.000001$. القيم لا تبلغ الصفر أبداً، لكنّها تتجمّع حوله وتقترب منه كما نشاء. هذا بالضبط ما سنسمّيه نهاية.

ولكي يكون للسؤال معنى أصلاً، يجب أن يكون التابع معرّفاً بعيداً. نقول إنّ f معرّف في جوار اللّانهاية الموجبة إذا كانت مجموعة تعريفه تحوي مجالاً من الشكل $]a, +\infty[$ ، ونقول مثل ذلك في جوار اللّانهاية السالبة بمجال من الشكل $]-\infty, a[$.

$$]a, +\infty[\subset D_f \qquad a \in \mathbb{R}$$

تذكّر: $+\infty$ ليس عدداً ولا نقطة على المحور، فلا نعوّضه في التابع. النهاية عند اللّانهاية وصفٌ لاتّجاه القيم، لا حسابُ قيمة.

التابع g معرّف على المجال $[-4,7]$ وحده. هل للسؤال عن نهايته عند $+\infty$ معنى؟

أ) نعم، ونهايته $g(7)$
ب) لا، لأنّ التابع غير معرّف بعيداً
ج) نعم، ونهايته 0

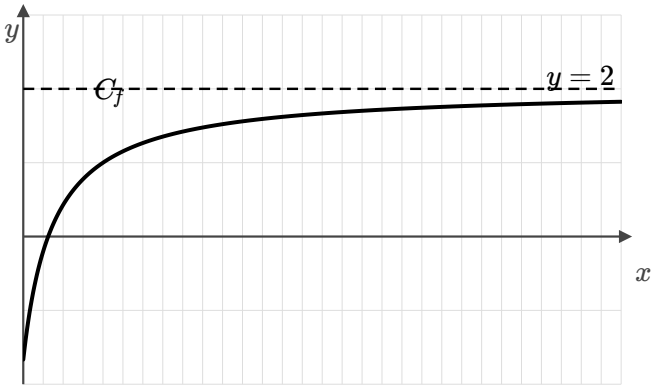
ب. صحيح. مجموعة التعريف لا تحوي أيّ مجال من الشكل $]a,+\infty[$ ، فالسؤال نفسه بلا معنى هنا.

النهاية المنتهية والمقارب الأفقي

لنعد إلى $\frac{1}{x}$. قلنا إنّ قيمه تتجمّع حول 0 ، ونكتب ذلك $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$. ونقرأ: نهاية التابع عند $+\infty$ هي 0 .

الحالة العامّة هي هذه نفسها، بعدد آخر مكان الصفر. نقول إنّ نهاية f عند $+\infty$ هي العدد ℓ إذا صارت قيم $f(x)$ قريبة من ℓ وتجمّعت حوله، كلّما صارت x كبيرة بما يكفي.

ولهذا الكلام ترجمة هندسيّة مباشرة. ارسم المستقيم الذي معادلته $y=\ell$. قولنا إنّ القيم تتجمّع حول ℓ يعني أنّ الخطّ البياني يلتصق بهذا المستقيم كلّما ذهبنا بعيداً. المستقيم اسمه المقارب الأفقي، والالتصاق يحدث بعيداً وحده، لا قرب المبدأ.



$f(x)=\dfrac{4x-5}{2x+3}$. قرب المبدأ يبتعد الخطّ البياني عن المستقيم $y=2$ ، وكلّما كبرت x التصق به من دون أن يبلغه.

تعريف 1

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ell$ قيم $f(x)$ تتجمّع حول العدد ℓ حين تصير x كبيرة بما يكفي.

$\Delta: y=\ell$ المستقيم Δ مقارب أفقي للخطّ البياني C_f عند $+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ يُعرَّف بالمثل حين يكون f معرّفاً في جوار اللّانهاية السالبة، وعندئذ يكون $y = \ell$ مقارباً أفقياً عند $-\infty$.

الكتاب، الصفحة 21

انتبه: معادلة المقارب الأفقي هي $y = \ell$ ، لا $x = \ell$. المقارب الأفقي مستقيم موازٍ لمحور الفواصل، فالثابت فيه هو y . الذي يُكتب $x = a$ هو المقارب الشاقولي، وهو موضوع درس آخر.

النهايات المرجعيّة

لا نبدأ من الصفر في كلّ مرّة. الكتاب يعطي قائمة قصيرة من النهايات نحفظها، ويُردّ إليها كلّ حساب لاحق. وكلّها من عائلة واحدة: مقلوب شيء يكبر بلا حدّ يصغر بلا حدّ.

نهايات مرجعيّة

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ الجذر معرّف للقيم الموجبة وحدها، فهذه النهاية عند $+\infty$ فقط.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$ القائمة عند $-\infty$ أقصر: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ليست فيها.

$\Delta : y = 0$ محور الفواصل نفسه مقارب أفقي للخطّ البياني لكلّ من هذه التوابع.

الكتاب، الصفحة 22

انتبه: لا تنقل نتيجة $+\infty$ إلى $-\infty$ بلا فحص. في القوى الفرديّة والجذور والقيم المطلقة تنقلب الإشارة، أو يختفي التعريف أصلاً: $\frac{1}{\sqrt{x}}$ لها نهاية عند $+\infty$ وليس للسؤال عنها عند $-\infty$ معنى. الطرفان يُحسبان كلٌّ على حدة.

وبهذه القائمة نحسب نهاية كثير من التوابع الكسريّة عند اللّانهاية. الحيلة واحدة: نُخرج الحدّ الأكبر من البسط ومن المقام، فيبقى داخل القوسين ما نعرف نهايته من القائمة أعلاه. أمّا الحالات التي لا تعطي عدداً منتهياً فلها درس خاصّ بها.

ما نهاية هذا التابع عند $-\infty$ ؟

$$f(x) = \frac{1}{x^3}$$

أ) 0

ب) $-\infty$

ج) لا وجود لها، لأنّ الأس فردي

أ. صحيح. المقام يكبر بالقيمة المطلقة بلا حدّ، فالكسر يصغر ويتجمّع حول 0 . القيم سالبة هنا، لكنّ النهاية هي 0 نفسها.

ليس لكلّ تابع نهاية

قد يظنّ المرء أنّ تابعاً محصوراً بين عددين لا بدّ أن يستقرّ في النهاية على قيمة. هذا غير صحيح، والكتاب يقف عنده وقفة خاصّة.

تابع الجيب $\sin$ يبقى دائماً بين -1 و 1 ، ومع ذلك ليست له نهاية عند $+\infty$. السبب أنّه لا يتجمّع حول أيّ عدد: مهما ابتعدنا يميناً عاد فبلغ 1 ثمّ -1 ثمّ 1 من جديد، فيبقى متأرجحاً بين قيمتين متباعدتين ولا يستقرّ قرب واحدة منهما.

انتبه: من كتب $\lim_{x\to+\infty} \sin x = 0$ بحجّة أنّ التابع يتوسّط بين -1 و 1 فقد أخطأ. الوسط الحسابي ليس نهاية. النهاية تعني أن تتجمّع القيم حول عدد وتبقى قربه، وقيم الجيب تغادر جوار الصفر مرّة بعد أخرى.

تذكّر: أن يكون التابع محصوراً شيء، وأن تكون له نهاية شيء آخر. التأرجح حالة قائمة بذاتها: لا نهاية منتهية، ولا $+\infty$ ، ولا $-\infty$.

فوق المقارب أم تحته

معرفة المقارب لا تكفي وحدها في الامتحان. يأتي بعدها دائماً سؤال الوضع النسبي: هل يقع الخطّ البياني فوق المقارب أم تحته، وعلى أيّ مجال.

والأداة واحدة وبسيطة: الفرق $f(x) - \ell$. إذا كان موجباً على مجال، فقيم التابع هناك أكبر من ℓ ، أي أنّ C_f فوق Δ . وإذا كان سالباً فـ C_f تحت Δ . وإذا انعدم عند قيمة، فالخطّ البياني يقطع مقاربه عندها فعلاً.

تذكّر: الترتيب ثابت: احسب النهاية، ثمّ اكتب معادلة المقارب، ثمّ ادرس إشارة $f(x)-\ell$. الإشارة وحدها هي التي تقول فوق أم تحت، لا الشكل ولا الحدس.

انتبه: لا تقل إنّ الخطّ البياني لا يلمس مقاربه أبداً. الوضع يتبع إشارة الفرق، والإشارة قد تتغيّر: كلّما انعدم $f(x)-\ell$ قطع C_f المستقيم Δ . المقارب وصفٌ لما يحدث بعيداً، لا منعٌ لما يحدث قريباً.

تابعٌ نهايته عند $+\infty$ هي 3 ، ووجدنا $f(x)-3=\frac{-2}{x+1}$. أين يقع الخطّ البياني بالنسبة إلى مقاربه على المجال $]-1,+\infty[$ ؟

أ) فوق المقارب

ب) يقطعه عند $x=1$

ج) تحت المقارب

ج. صحيح. على $]-1,+\infty[$ يكون $x+1>0$ والبسط سالباً، فالفرق سالب و C_f تحت Δ .

مثال الكتاب كاملاً

نجمع الآن كلّ ما سبق في مثال واحد، وهو مثال الكتاب نفسه. اقرأ الخطوة، احسبها على ورقتك، ثمّ اكشف الجواب.

التابع f معرّف على الأعداد الحقيقية ما عدا $-\frac{3}{2}$. والمطلوب ثلاثة أشياء بالترتيب: نهايته عند $+\infty$ ، ثمّ معادلة المقارب الأفقي، ثمّ الوضع النسبي للخطّ البياني C_f بالنسبة إلى هذا المقارب.

$$f(x)=\frac{4x-5}{2x+3}$$

1. نُخرج الحدّ الأكبر في البسط الحدّ الأكبر $4x$ ، وفي المقام $2x$. نُخرج كلّاً منهما، فيبقى داخل كلّ قوس عدد وكسر نعرف نهايته.

$$f(x)=\frac{4x\left(1-\frac{5}{4x}\right)}{2x\left(1+\frac{3}{2x}\right)}$$

2. نختصر ونقرأ النهاية نختصر x مع x ، فيبقى $\frac{4}{2}$ مضروباً بقوسين نهاية كلّ منهما 1 ، لأنّ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ من القائمة المرجعيّة.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{4}{2}=2$$

3. نكتب معادلة المقارب النهاية عدد منتهٍ، فللخطّ البياني مقارب أفقي عند $+\infty$. انتبه إلى المكتوب: y ، لا x .

$$\Delta : y=2$$

4. نطرح النهاية من التابع الوضع النسبي يُقرأ من إشارة الفرق، فنحسب الفرق أوّلاً ونوحّد المقام. لاحظ أنّ حدود x تتلاشى، ويبقى ثابت في البسط.

$$f(x)-2=\frac{4x-5-2(2x+3)}{2x+3}=\frac{-11}{2x+3}$$

5. ندرس إشارة الفرق البسط -11 ثابت وسالب، فإشارة الكسر معاكسة لإشارة المقام. والمقام $2x+3$ موجب بعد $-\frac{3}{2}$ وسالب قبلها.

$$I_1=\left]-\infty,\ -\tfrac{3}{2}\right[\ :\ f(x)-2>0$$
$$I_2=\left]-\tfrac{3}{2},\ +\infty\right[\ :\ f(x)-2<0$$

6. نستنتج الوضع النسبي الفرق موجب على I_1 وسالب على I_2 ، فالخطّ البياني C_f يقع فوق المقارب Δ على I_1 وتحته على I_2 . ولاحظ أنّ الفرق لا ينعدم أبداً، فالخطّ لا يقطع مقاربه في أيّ نقطة.

$$\frac{-11}{2x+3}\neq 0$$

أربع خطوات لا تتغيّر: أخرِج الحدّ الأكبر، اقرأ النهاية، اكتب $y=\ell$ ، ثمّ ادرس إشارة $f(x)-\ell$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\ell \ \Rightarrow\ \Delta : y=\ell$$

وبالحساب نفسه عند $-\infty$ نجد العدد 2 مرّة أخرى، فالمستقيم $y=2$ مقارب أفقي عند الطرفين معاً. هذا التساوي مسموح هنا لأنّ التابع كسر من كثيري حدود، بلا جذر وبلا قيمة مطلقة. مع الجذر أو القيمة المطلقة يُحسب كلّ طرف على حدة.

تذكّر: أوّل سطر في كلّ مسألة تحليل في البكالوريا هو نهايات التابع عند طرفي مجموعة التعريف. من أتقن هذا الدرس كسب هذه النقاط قبل أن يبدأ الباقي.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 21 إلى 24 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.