الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

الاستمرار

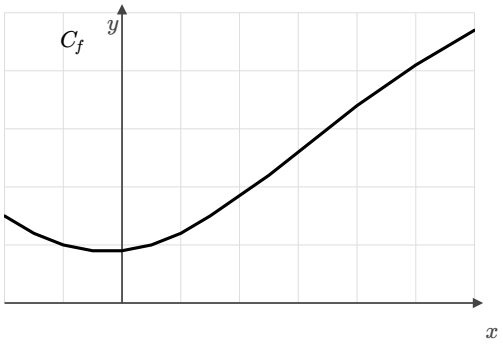
حين تكون نهاية التابع عند نقطة هي قيمته عندها بالضبط

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 7

كلّ ما مضى من هذه الوحدة كان عن النهاية وحدها: إلى أين تتّجه قيم التابع. وفي هذا الدرس نضع النهاية وجهاً لوجه نفسها عند النقطة، ونسأل سؤالاً واحداً: هل تساويها؟ إن كان الجواب نعم قلنا إنّ التابع مستمرّ عند تلك النقطة. الفك لكنّها الشرط الذي تقوم عليه مبرهنة القيمة الوسطى وحلّ المعادلات في الدرس التالي، وهي التي تفصل بين الرسم الذ والحساب الذي يبرهن.

الرسم يقترح، والحساب يحكم

أسهل طريق إلى فكرة الاستمرار هو النظر إلى الخطّ البياني. يقول الكتاب إنّ التابع مستمرّ على مجال حين يكون خطّه الب «قطعة واحدة»، أو حين نستطيع رسمه «دون رفع القلم» عن الورقة. ولاحظ أنّ الكتاب نفسه وضع هاتين العبارتين بي اقتباس: فهما وصف لما نراه، لا تعريف نحسب به.



التابع f على المجال $[-2, 6]$: الخطّ البياني قطعة واحدة، فلا انقطاع في أيّ نقطة منه.

خذ الآن تابعاً آخر g معرّفاً على المجال نفسه $[-2, 6]$ ، لكنّه يقفز عند 3 : كلّما اقتربنا من 3 من جهة اليسار ا 1 ، وكلّما اقتربنا من جهة اليمين اقتربت قيمه من 2 . القراءتان لا تلتقيان.

$$\lim_{x \to 3,\ x<3} g(x) = 1 \qquad \lim_{x \to 3,\ x>3} g(x) = 2$$

العددان مختلفان، فليس للتابع g نهاية عند 3 ، وخطّه البياني ينفصل هناك إلى قطعتين. ولاحظ كيف انتهى الأمر: وختمنا بحساب نهايتين. الصورة دلّتنا على موضع الشكّ، والنهاية هي التي حكمت.

انتبه: لا يُقبل «الخطّ البياني قطعة واحدة» جواباً في ورقة الامتحان. الرسم يدلّ ولا يبرهن، ودقّة القلم لا تكفي للتمييز بين قط واتّصال. البرهان في كلّ حال هو الحساب: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

التعريف: النهاية عند a هي $f(a)$

ما الذي ينقص التابع g عند 3 ؟ قيمته هناك موجودة، والقيم من الجهتين تقترب من عددين، لكنّ العددين مختلف
أصلاً. وحتى لو تساوت النهايتان من الجهتين على عدد واحد، يبقى سؤال أخير: هل ذلك العدد هو قيمة التابع نفسها ع

من هنا يأتي التعريف. الاستمرار عند نقطة a يجمع ثلاثة شروط في سطر واحد: أن تكون a من مجموعة التعريف فت
$f(a)$ ، وأن توجد النهاية $\lim_{x\to a} f(x)$ ، وأن يتساوى الاثنان.

تعريف 6

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ لتكن a نقطة من D_f . نقول إنّ التابع f مستمرّ عند a ، إذا وفقط إذا تحقّق هذا
$(D \subset D_f)$ $\forall a \in D,\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ونقول إنّ f مستمرّ على مجموعة D محتواة في
وفقط إذا كان مستمرّاً عند كلّ نقطة من نقاط D .

الكتاب، الصفحة 42

ونضيف شرطاً على مجموعة التعريف نفسها: D_f مؤلّفة من مجال أو من اجتماع مجالات غير مقتصرة على نقطة وا
واضح: لكي نتكلّم على اقتراب x من a يجب أن يكون حولها ما نقترب منه.

انتبه: ليس لدراسة استمرار تابع، عند نقطة لا تنتمي إلى مجموعة تعريفه، أيُّ معنى. التابع $x \mapsto \frac{1}{x}$ ليس «غير مستمرّ عن
الصفر ليس من مجموعة تعريفه أصلاً، وهو مستمرّ على كامل مجموعة تعريفه $\mathbb{R}^*$.

تابعٌ f معرّف على الأعداد الحقيقية، ونعلم أنّ $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ وأنّ $f(2) = 3$. هل f مستمرّ
أ) نعم، لأنّ للتابع نهاية عند 2
ب) نعم، لأنّ التابع معرّف عند 2
ج) لا، لأنّ النهاية لا تساوي $f(2)$

ج. صحيح. القيم تتجمّع حول 5 بينما التابع يأخذ عند 2 القيمة 3 ، فالشرط $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$ غير محقّ

الاستمرار يمرّ عبر العمليّات

لا حاجة إلى برهان جديد هنا. الاستمرار مكتوب بالنهايات، ونحن نعرف من الدروس السابقة كيف تتصرّف النهايات مع ال
والقسمة والتركيب. فما يصحّ هناك ينتقل إلى هنا كما هو.

نتائج مباشرة من العمليّات على النهايات

$u \times v$ $u + v$ مجموع تابعين مستمرّين عند نقطة (أو على مجموعة) مستمرّ عندها، وكذلك جداء ضربهما.

$v(a) \neq 0$, $\frac{u}{v}$ خارج القسمة مستمرّ أيضاً، شريطة كونه معرّفاً عند النقطة المدروسة.

$x \mapsto h\big(u(x)\big)$ مركّب تابعين مستمرّين مستمرّ، وهذا يأتي من خاصّة نهاية التابع المركّب.

الكتاب، الصفحة 42

انتبه: الشرط في القسمة ليس زينة. إذا انعدم المقام عند النقطة فالكسر غير معرّف هناك، والسؤال عن استمراره عند تلك ال
الجواب الصحيح في هذه الحال هو تحديد مجموعة التعريف أوّلاً، ثمّ القول إنّ التابع مستمرّ عليها كلّها.

التابعان u و v مستمرّان على الأعداد الحقيقية، و $v(1)=0$. ماذا نقول عن $\frac{u}{v}$ عند 1 ؟

أ) السؤال بلا معنى، لأنّ الكسر غير معرّف عند 1

ب) مستمرّ عند 1 ، لأنّ البسط والمقام مستمرّان

ج) غير مستمرّ عند 1 ، وقيمته هناك $+\infty$

أ. صحيح. العدد 1 ليس من مجموعة تعريف الكسر، فلا نسأل عن استمراره عنده. نقول بدل ذلك إنّ الكسر مستمرّ على مجموعة تعريفه.

التوابع التي نعرف استمرارها

الطريق الأقصر إلى الاستمرار في الامتحان ليس التعريف، بل قائمة قصيرة من التوابع المرجعيّة نعرف استمرارها سلفاً. و كلّها واحدة: هذه التوابع اشتقاقيّة، والاشتقاق يعطي الاستمرار كما سنرى في الفقرة التالية.

استمرار التوابع المرجعيّة

$x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي على المجال المفتوح $]0,+\infty[$ فمستمرّ عليه، و $\sqrt{x}=0=f(0)$ ، فهو مستمرّ على المجال كلّه بما فيه الصفر. $\quad , \quad [0,+\infty[$

$P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ توابع كثيرات الحدود مستمرّة على $\mathbb{R}$.

$\frac{P(x)}{Q(x)}$ التوابع الكسريّة مستمرّة على مجموعة تعريفها D .

$x \mapsto \cos x \quad , \quad x \mapsto \sin x$ التابعان مستمرّان على $\mathbb{R}$.

الكتاب، الصفحة 43

تأمّل السطر الأوّل جيّداً، ففيه درس صغير. الاشتقاق أعطانا الاستمرار على المجال المفتوح وحده، لأنّ الجذر ليس اشتق أمّا الصفر نفسه فأُلحق بالمجال بالتعريف مباشرة، بحساب النهاية ومقارنتها بالقيمة. أي أنّ الطريقين يعملان معاً: القاع تكفي، والتعريف عند النقطة العنيدة.

وبهذه القائمة يصير الحكم على تابع مركّب مسألة قراءة. مثلاً $f : x \mapsto \sqrt{x^2+4x+5}$ معرّف على $\mathbb{R}$ لأ موجب تماماً دائماً، إذ نكتبه بالشكل القانوني:

$$x^2+4x+5=(x+2)^2+1 \geq 1 > 0$$

ثمّ نسمّي $g : x \mapsto x^2+4x+5$ و $h : x \mapsto \sqrt{x}$ ، فيكون $f(x)=h\big(g(x)\big)$ على $\mathbb{R}$. والتا حدود مستمرّ على $\mathbb{R}$ ، والتابع h مستمرّ على مجموعة تعريفه، فالمركّب f مستمرّ على $\mathbb{R}$. وبالمثل $x \mapsto \sin x+\cos x$ مستمرّ على $\mathbb{R}$ لأنّه مجموع تابعين مستمرّين عليها.

تذكّر: كلّ تابع نبنيه من كثيرات الحدود والكسور والجذر والجيب وجيب التمام، بجمع أو ضرب أو قسمة أو تركيب، هو مستم تعريفه. فالعمل الحقيقي في السؤال ليس إثبات الاستمرار، بل تحديد مجموعة التعريف بدقّة.

بين الاشتقاق والاستمرار

بقي أن نثبت الجملة التي اتّكأنا عليها في القائمة أعلاه: الاشتقاق يعطي الاستمرار. والبرهان قصير، ويستحقّ أن يُقرأ لأنّه يُ
المساواة $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

مبرهنة 5

إذا كان التابع f اشتقاقيّاً في نقطة a ، كان مستمرّاً في a . $f'(a) \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

وإذا كان f اشتقاقيّاً على مجال I ، كان مستمرّاً على I . $\forall a \in I,\ f'(a) \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \forall a \in I,\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

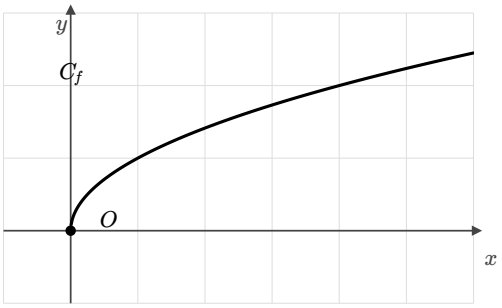
الكتاب، الصفحة 42

أمّا البرهان فهذا: نفترض f اشتقاقيّاً عند a ، ونضع $g(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ من أجل $x \neq a$. كون f اشت
بالضبط أنّ g نهاية منتهية عند a هي $f'(a)$. ومن تعريف g نكتب $f(x) - f(a) = (x-a)\,g(x)$
النهايتين نجد $\lim_{x\to a}\big(f(x) - f(a)\big) = 0 \times f'(a) = 0$ ، أي $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

والسؤال الذي يطرح نفسه فوراً: وهل يصحّ العكس؟ لا. وأشهر شاهد على ذلك هو تابع الجذر التربيعي عند الصفر. رأين
هناك، ومع ذلك نحسب معدّل تغيّره فنجد:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty$$

النهاية غير منتهية، فالتابع غير اشتقاقي عند الصفر. وترجمة ذلك على الرسم أنّ الخطّ البياني يقبل في المبدأ مماساً «شاق
بلا حدّ، والمماس ينتصب موازياً لمحور التراتيب من دون أن ينقطع الخطّ.



$x \mapsto \sqrt{x}$: التابع مستمرّ عند الصفر، لكنّ خطّه ينطلق منه منتصباً، فالمماس شاقولي ولا اشتقاق هناك.

انتبه: استمرار تابع عند a لا يعني بالضرورة قابليّة اشتقاقه في a . التابعان $x \mapsto \sqrt{x}$ و $x \mapsto |x|$ مستمرّان عند
اشتقاقيّين عنده. السهم يسير في اتّجاه واحد: من الاشتقاق إلى الاستمرار، لا العكس.

تابعٌ f مستمرّ على مجال I . ماذا نستنتج عن اشتقاقه على I ؟

أ) أنّه اشتقاقي على I

ب) لا شيء، فالاستمرار وحده لا يقرّر الاشتقاق

ج) أنّه غير اشتقاقي على I

ب. صحيح. الاستمرار شرط لازم للاشتقاق وليس كافياً، والفصل يحتاج حساب نهاية معدّل التغيّر عند كلّ نقطة مشكوك فيه

مثال محلول: تابع مركّب

نجمع الآن كلّ ما سبق في مسألة واحدة من تمارين الكتاب. اقرأ الخطوة، اعمل على ورقتك، ثمّ اكشف الجواب.

المطلوب ثلاثة أشياء بالترتيب: مجموعة تعريف التابع f ، ثمّ دراسة استمراره على مجموعة تعريفه، ثمّ الجواب عن

هل يكفي ذلك للحكم على اشتقاقه؟

$$f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$$

1. نحدّد مجموعة التعريف الجذر يطلب مقداراً غير سالب تحته. ونعلم أنّ $\cos x \le 1$ مهما كانت x ، فالمقدار x غير سالب دائماً. إذن لا قيد على x .

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \cos x \ge 0 \ \Rightarrow\ D_f = \mathbb{R}$$

2. نفكّك التابع إلى مركّب نسمّي الداخل u والخارج h ، فيصير f مركّباً منهما. هذه هي الخطوة التي تحوّل السؤال قائمة التوابع المرجعيّة.

$$u(x) = 1 - \cos x \quad , \quad h(t) = \sqrt{t} \quad , \quad f(x) = h\big(u(x)\big)$$

3. نحكم على الداخل التابع u فرق بين تابع ثابت وتابع جيب التمام، وكلاهما مستمرّ على $\mathbb{R}$. ففرقهما مستمرّ على

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \le 1 - \cos x \le 2$$

4. نحكم على الخارج التابع h هو الجذر التربيعي، وهو مستمرّ على $[0, +\infty[$. وقيم u كلّها في $[0, 2]$ ، أي داخ فالتركيب مشروع.

$$u(\mathbb{R}) \subset [0, +\infty[$$

5. نستنتج الاستمرار مركّب تابعين مستمرّين مستمرّ. الداخل مستمرّ على $\mathbb{R}$ والخارج مستمرّ على مجال يحوي صورته، فالنتيجة مباشرة.

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x \to a} h\big(u(x)\big) = h\big(u(a)\big)$$

6. نجيب عن سؤال الاشتقاق لا يكفي. الاستمرار لا يقرّر الاشتقاق، والمواضع المشكوك فيها هنا هي النقاط التي ينعدم عند الجذر، أي $x = 2k\pi$ ، لأنّ الجذر نفسه غير اشتقاقي عند الصفر. والفصل في هذه النقاط يحتاج حساب نهاية معدّل التغيّر $\sqrt{x}$.

$$1 - \cos x = 0 \iff x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

الترتيب ثابت في كلّ سؤال استمرار: حدّد مجموعة التعريف، فكّك التابع إلى توابع مرجعيّة، ثمّ استعمل العمليّات والتركيب. الـ
نلجأ إليه إلا عند نقطة عنيدة.

$$(x) = u(a)\ ,\ \lim_{t \to u(a)} h(t) = h\big(u(a)\big) \ \Rightarrow\ \lim_{x \to a} h\big(u(x)\big) = h\big(u$$

تذكّر: الاستمرار هو الشرط الذي يفتح الدرس التالي. من دونه لا مبرهنة القيمة الوسطى ولا ضمان لوجود حلّ للمعادلة $= k$
ومعه ومع الاطّراد التامّ يصير الحلّ موجوداً ووحيداً.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 42 إلى 44 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.