الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

العمليّات على النهايات

كيف نحسب نهاية مجموع وجداء وكسر، ومتى يعجز الجدول عن الجواب

التوابع: النهايات والاستمرار . الوحدة 2 . الدرس 3

تعلّمنا حتى الآن نهايات توابع بسيطة، واحداً واحداً. لكنّ التوابع التي تأتي في الامتحان مركّبة من
الطبيعي هو: إذا عرفنا نهاية كلّ قطعة، هل نعرف نهاية المجموع؟ الجواب نعم في معظم الحالا
أربع حالات تبقى خارج الجداول، وهي التي يلزمها عملٌ إضافيّ قبل أن ينطبق الجدول. في هذا ال
نفعل حين تصمت.

نهاية المجموع

المبرهنات التي يعرضها الكتاب في جداول تفيد في حساب نهايات التوابع $f+g$ و fg و
وهي تعمل في المواضع الثلاثة كلّها من غير تغيير: عند $+\infty$ ، وعند $-\infty$ ، وعند نقطة a
الجداول من دون ذكر الموضع.

معظم الخانات سهلة التوقّع بالحدس. خذ هذه الحالة: إذا كان $\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty$
فقيم f تكبر بلا حدّ وقيم g تتجمّع حول 3 ، فمجموعهما يكبر بلا حدّ أيضاً. إضافة عدد ثا

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \;\wedge\; \lim_{x\to 1} g(x) = 3 \;\Longrightarrow\; \lim_{x\to 1} (f+g)(x) = +\infty$$

وهكذا تُقرأ كلّ خانة من الجدول: لا حفظاً، بل بالسؤال «ماذا يفعل الكبير مع الصغير هنا». يبقى
أحد التابعين نحو $+\infty$ ويكبر الآخر نحو $-\infty$. عندئذ يتنازع الطرفان، والنتيجة تتوقّف عل

انظر إلى ثلاثة أمثلة، كلّها من الصيغة نفسها عند $+\infty$: في $x - x$ يتعادل الطرفان فالنتي
فالنتيجة $+\infty$ ، وفي $x - x^2$ تنقلب فتصير $-\infty$. ثلاث نتائج مختلفة من شكل واحد

نهاية المجموع

$\lim f = \ell\,,\ \lim g = \ell' \;\Longrightarrow\; \lim(f+g) = \ell + \ell'$	حيث ℓ و ℓ' عد
$\lim f = \ell\,,\ \lim g = \pm\infty \;\Longrightarrow\; \lim(f+g) = \pm\infty$	العدد الثابت لا يغي
$\lim f = +\infty\,,\ \lim g = +\infty \;\Longrightarrow\; \lim(f+g) = +\infty$	
$\lim f = -\infty\,,\ \lim g = -\infty \;\Longrightarrow\; \lim(f+g) = -\infty$	
$\lim f = +\infty\,,\ \lim g = -\infty$	الخانة الحمراء الوحيدة في هذا الجدول. لا نتيجة، وه

. $+\infty - \infty$

الكتاب، الصفحة 29

انتبه: الخانة الحمراء لا تعني «النهاية غير موجودة»، ولا تعني 0 . تعني أنّ معرفة نهاية f ونهاية
يعود إلى الصيغة نفسها ويعيد كتابتها. النهاية قد تكون موجودة تماماً، كما في $x^2 - x$.

الجداء والكسر

جدول الجداء يتبع قاعدة الإشارات المعروفة. إذا كانت نهاية f عدداً غير معدوم ونهاية g لا
حاصل ضرب الإشارتين. وإذا كانت النهايتان لا نهائيتين معاً، فالأمر نفسه.

نهاية الجداء

$$\lim f = \ell \,,\ \lim g = \ell' \implies \lim(fg) = \ell \cdot \ell'$$

$$\lim f = \ell > 0 \,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim(fg) = \pm\infty$$

$$\lim f = \ell < 0 \,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim(fg) = \mp\infty$$ العامل السالب

$$\lim f = \pm\infty \,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim(fg) = +\infty$$ حين تتّفق الإشارت

$$\lim f = \pm\infty \,,\ \lim g = \mp\infty \implies \lim(fg) = -\infty$$ حين تختلف الإش

الإشارة حاصل ضرب الإشارتين.

$\lim f = 0 \,,\ \lim g = \pm\infty$ الخانة الحمراء الوحيدة هنا، وهي حالة عدم التعيين $(\infty$

الكتاب، الصفحة 29

أمّا الكسر $\frac{f}{g}$ فالكتاب يقسمه إلى حالتين، والفرق بينهما هو مفتاح الدرس كلّه: هل نهاية المقا

فالجدول يشبه جدول الجداء تماماً، ويُضاف إليه سطر واحد جديد: عدد منتهٍ مقسوم على شي

نهاية الكسر، حين لا تنعدم نهاية المقام

$$\lim f = \ell \,,\ \lim g = \ell' \neq 0 \implies \lim \tfrac{f}{g} = \tfrac{\ell}{\ell'}$$

$\lim f = \ell \,,\ \lim g = \pm\infty \implies \lim \frac{f}{g} = 0$ عدد ثابت مقسوم على مقام يك

$$\lim f = \pm\infty \,,\ \lim g = \ell' > 0 \implies \lim \tfrac{f}{g} = \pm\infty$$

$\lim f = \pm\infty \,,\ \lim g = \ell' < 0 \implies \lim \frac{f}{g} = \mp\infty$ المقام السالب يقل

الإشارة حاصل قسمة الإشارتين.

$\lim f = \pm\infty \,,\ \lim g = \pm\infty$ الخانة الحمراء، وهي حالة عدم التعيين $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

الكتاب، الصفحة 29

وتبقى الحالة الحرجة: نهاية المقام معدومة. هنا لا تكفي النهاية وحدها، وهذا ما يميّز جدول الك

عند الصفر: المقام يقترب من 0 في الحالتين، ومع ذلك تكون النهاية $+\infty$ من اليمين و

المقام، بل في إشارة قيمه.

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

لهذا يكتب الكتاب في سطر المقام عبارتين لا واحدة: 0 وقيم g موجبة، أو 0 وقيم g س

جواب أصلاً.

نهاية الكسر، حين تنعدم نهاية المقام

$\lim f > 0 \,,\ \lim g = 0^+ \implies \lim \frac{f}{g} = +\infty$ 0^+ اختصارٌ لقول الكتاب:

$\lim f > 0$ يشمل العدد الموجب و $+\infty$ معاً.

$$\lim f > 0 \,,\ \lim g = 0^- \implies \lim \tfrac{f}{g} = -\infty$$

$$\lim f < 0 \,,\ \lim g = 0^+ \implies \lim \tfrac{f}{g} = -\infty$$

$$\lim f < 0 \,,\ \lim g = 0^- \implies \lim \tfrac{f}{g} = +\infty$$

$\lim f = 0 \,,\ \lim g = 0$ الخانة الحمراء، وهي حالة عدم التعيين $\frac{0}{0}$ ، وهي التي تحتاج ع

الكتاب، الصفحة 29

انتبه: لا تكتب $\frac{2}{0} = \infty$ بلا إشارة. حين تنعدم نهاية المقام يجب دراسة إشارة g على يمين ا

منفصلتين. والنهاية من الجهتين لا توجد إلّا إذا تساوت النهايتان الجانبيّتان.

ما نهاية هذا التابع حين تقترب x من 2 وهي أكبر من 2 ؟

$$f(x) = \frac{3}{x-2}$$

أ) $-\infty$
ب) $+\infty$
ج) 0

ب. صحيح. البسط 3 موجب، والمقام يقترب من 0 بقيم موجبة، فالكسر يكبر بلا حدّ نحو ∞

أربع صيغ لا تُقرأ من الجدول

جمعنا الآن الخانات الحمراء الأربع من الجداول الأربعة. حين نقع على إحداها لا نستطيع تحديد دراسة أكثر تفصيلاً. هذه هي صيغ عدم التعيين.

صيغ عدم التعيين

$\infty - \infty$ من جدول المجموع: طرف يكبر نحو $+\infty$ وطرف نحو $-\infty$.

$0 \times (\pm\infty)$ من جدول الجداء: عامل يصغر نحو 0 وعامل يكبر بلا حدّ.

$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ من جدول الكسر حين لا تنعدم نهاية المقام.

$\frac{0}{0}$ من جدول الكسر حين تنعدم نهاية المقام.

الكتاب، الصفحة 30

تذكّر: هذه الكتابة رموزٌ لتسهيل الكلام عن حالات عدم التعيين، وليس لها معنى رياضي. الكسر $\frac{0}{0}$ المقام معدوماً.

والدليل على أنّه لا عدد وراء هذه الرموز بسيط. خذ ثلاثة توابع عند الصفر، كلّها من الصيغة $\frac{0}{0}$ نهايته 0 ، والثالث $\frac{x}{x^2}$ لا نهاية له عند الصفر أصلاً، إذ تكبر قيمه نحو $+\infty$ من اليمين ونح وثلاث نتائج مختلفة.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^2} = +\infty \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

انتبه: أشهر خطأ في هذه الوحدة هو قراءة الصيغة كأنّها عدد: $\frac{0}{0} = 1$ أو $\frac{\infty}{\infty} = 1$ أو $= 0$ اسمٌ لحالة، لا قيمة. الجواب لا يأتي إلّا بعد إعادة كتابة التابع.

علمنا أنّ $\lim f = 0$ وأنّ $\lim g = +\infty$ عند النقطة نفسها. ما نهاية الجداء g

أ) 0
ب) $+\infty$
ج) لا يعطي الجدول جواباً، وهي حالة عدم تعيين

ج. صحيح. هذه هي الخانة الحمراء $0 \times (\pm\infty)$. يجب إعادة كتابة الجداء قبل أيّ استنتاج.

ثلاث حيل لرفع عدم التعيين

الفكرة واحدة في الحيل الثلاث: التابع لا يتغيّر، بل تتغيّر صيغته. نبحث عن كتابة أخرى للتابع نفس
نطبّق الجداول على الصيغة الجديدة. الكتاب يعرض ثلاث حيل، وهي عُدّة هذا الدرس. وليست
يحتاج أدوات الدروس التالية.

الحيلة الأولى: إخراج عامل مشترك ثمّ الاختصار. مثال الكتاب هو $h(x) = \frac{x^2 - x}{\sin x}$ عند الص
فالصيغة $\frac{0}{0}$. نُخرج x عاملاً مشتركاً في البسط، ثمّ نفصل الكسر إلى جزأين.

$$= \frac{x}{\sin x} \times (x - 1) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad , \quad v(x) = \frac{\sin x}{x} \ , \ u(x)$$

ونستعمل هنا النتيجة $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ، وهي من نشاطٍ خارج هذه الدروس، نقبلها ك
و $\lim_{x \to 0} u(x) = -1$ ، ومقام نهايته 1 غير معدوم، فالجدول ينطبق أخيراً.

$$\lim_{x \to 0} h(x) = \frac{-1}{1} = -1$$

الحيلة الثانية: الضرب بالمرافق. تُستعمل كلّما ظهر جذر في فرق. مثال الكتاب هو $\frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$ =
$\frac{0}{0}$ أيضاً. نضرب البسط والمقام بمرافق البسط $\sqrt{x+1} + 1$ ، فيختفي الجذر من البس

$$\frac{- 1) \left(\sqrt{x+1} + 1 \right)}{\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{x + 1 - 1}{x \left(\sqrt{x+1} + 1 \right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} +}$$

المقام لم يعد ينعدم عند الصفر، بل نهايته 2 . فالنتيجة تُقرأ من الجدول مباشرة: $x) = \frac{1}{2}$

انتبه: انعدام المقام عند نقطة لا يعني وجود مقارب شاقولي هناك. في هذا المثال ينعدم المقام عند
$\frac{1}{2}$. لا يُحكم بالمقارب الشاقولي إلّا بعد الاختصار أو الضرب بالمرافق.

الحيلة الثالثة: إخراج الحدّ المُسيْطِر خارج قوسين. تُستعمل عند $+\infty$ و $-\infty$ وحدهما.
عند $+\infty$ ، وهو من الصيغة $\frac{+\infty}{+\infty}$. نُخرج x من البسط ومن المقام ونختصر، علماً أنّ

$$) = \frac{x \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$$

وقد بقي داخل القوسين ما نعرف نهايته من القائمة المرجعيّة: $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و 0
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

تذكّر: الترتيب واحد في الحيل الثلاث: نتعرّف على الصيغة أوّلاً، ثمّ نعيد كتابة التابع، ثمّ نطبّق الجدو
كتب جواباً لا معنى له.

الحدّ المُسيْطِر عند اللّانهاية

الحيلة الثالثة تستحقّ أن تصير قاعدة، لأنّها تتكرّر في كلّ مسألة تحليل. والكتاب يضع القاعدتين ب
الحدود ونهايات التوابع الكسريّة عند $+\infty$ أو $-\infty$.

الجواب الأوّل: عند $+\infty$ وكذلك عند $-\infty$ ، نهاية تابع كثير الحدود هي نفسها نهاية حدّه
لاحظ: أعلى درجة، لا أكبر أمثال. الحدّ $100x^3$ لا يسيطر على $-2x^4$ مهما بدا كبيراً.

مثال الكتاب على القاعدة الأولى. المطلوب نهاية هذا التابع كثير الحدود عند $+\infty$. احسب
أن تكشفها.

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$$

1. نتعرّف على الصيغة عند $+\infty$ يكبر x^3 نحو $+\infty$ ، ويكبر $-2x^2$ نحو $-\infty$. فا
والجدول صامت.

$$+\infty - \infty$$

2. نعيّن الحدّ المُسيْطِر الدرجات هي 3 و 2 و 1 و 0 . أعلاها 3 ، فالحدّ المُسيْطِر هو

$$x^3$$

3. نُخرجه خارج قوسين نقسم كلّ حدّ على x^3 داخل القوسين. انتبه إلى الحدّ الأخير: -1 م
$-\frac{1}{x}$.

$$f(x) = x^3\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$$

4. نقرأ نهاية القوس كلّ كسر داخل القوس من القائمة المرجعيّة ونهايته 0 ، فيبقى 1 وحده.
الأعلى درجة يذوب.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = 1$$

5. نضرب بجدول الجداء صار عندنا جداء عاملين: الأوّل نهايته $+\infty$ والثاني نهايته 1 وهو ع
تعيين فيها.

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

نهاية كثير الحدود عند طرفي المحور هي نهاية حدّه الأعلى درجة، وحده. الحدود الأخرى والأمثال لا أ

$$a_n x^n + \cdots + a_0) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$. قرب المبدأ تُرى آثار الحدود الصغرى وينحني الخطّ البياني، وكلّما ابتع

الجواب الثاني يخصّ التوابع الكسريّة التي بسطها ومقامها كثيرا حدود. عند $+\infty$ أو $-\infty$ الحدّ المُسيْطِر في البسط على الحدّ المُسيْطِر في المقام. والبرهان هو الحيلة الثالثة نفسها: نُخرج البسط والمقام، ونختصر، ثمّ نبحث عن النهاية.

قاعدة الحدّ المُسيْطِر

$\lim_{x\to\pm\infty} P(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$ حيث $a_n x^n$ هو الحدّ الأعلى درجة في كثير

$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$ الحدّان المُسيْطِران وحدهما، ثمّ يُخ

الكتاب، الصفحة 31

انتبه: القاعدتان صالحتان عند $+\infty$ و $-\infty$ فقط. عند نقطة a من الأعداد الحقيقية لا م
التابع، فإن ظهرت صيغة عدم تعيين رجعنا إلى الاختصار أو المرافق. من كتب
$\lim_{x\to 1}(x^3 - 2x^2 + x - 1) = \lim_{x\to 1} x^3 = 1$ فقد نقل قاعدة من مكانها،

بهذه القاعدة صارت أسئلة «تدرّب» في الدرس الأوّل ممكنة. كانت هناك ستّة كثيرات حدود مطل
قد وصلت بعد. وهي الآن سطر واحد لكلّ منها: عيّن الحدّ الأعلى درجة، ثمّ اقرأ نهايته.

ما نهاية هذا التابع عند $+\infty$ ؟

$$f(x) = -2x^4 + 100x^3$$

أ) $-\infty$
ب) $+\infty$
ج) 98

أ. صحيح. الحدّ المُسيْطِر هو $-2x^4$ لأنّ درجته أعلى، ونهايته $-\infty$.

مثال الكتاب: تابع كسري عند اللّانهاية السالبة

نختم بمثال الكتاب الأخير، وهو تابع كسري عند $-\infty$. اخترناه لأنّه يجمع القاعدتين معاً ويُظهر
جديداً، بل الانتباه نفسه إلى الإشارة.

المطلوب نهاية هذا التابع الكسري عند $-\infty$ ، أي حين تكون x سالبة وكبيرة بقيمتها ال

$$f(x) = \frac{2x + 6}{x^2 - 3x + 1}$$

1. نتعرّف على الصيغة عند $-\infty$ يذهب البسط $2x+6$ نحو $-\infty$ ، ويذهب المقام درجته زوجيّة ومعامله الأعلى موجب. الشرطان معاً، فالدرجة وحدها لا تكفي. فالصيغة $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ، وه

$$\frac{-\infty}{+\infty}$$

2. نعيّن الحدّين المُسيْطِرين في البسط الحدّ الأعلى درجة هو $2x$ ، وفي المقام هو x^2 . هذان

$$\frac{2x}{x^2}$$

3. نُخرجهما خارج قوسين نكتب كلّ حدّ آخر على شكل كسر مقامه قوّة من x ، فيبقى داخل الق

$$f(x)=\frac{2x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

4. نختصر نختصر x من x^2 ، فيبقى الكسر $\frac{2}{x}$ مضروباً بقوسين نهاية كلّ منهما 1 .

$$f(x)=\frac{2}{x}\cdot\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}$$

5. نقرأ النهايات الثلاث من القائمة المرجعيّة $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$ ، فالكسر الأوّل نهايته 0 ،

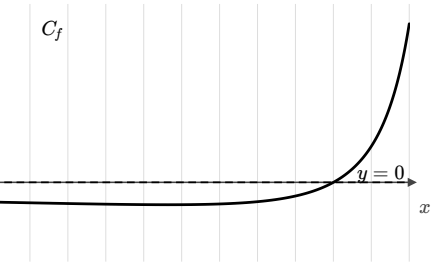
$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=1\,,\ \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

6. نضرب ونستنتج عندنا جداء عاملٍ نهايته 0 بعاملٍ نهايته عدد منتهٍ، فالجداء نهايته 0 . والم
مقارب أفقي للخطّ البياني عند $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

حين تكون درجة المقام أعلى من درجة البسط، تكون النهاية عند الطرفين 0 ، ومحور الفواصل مق

$$<m\ \Longrightarrow\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_nx^n}{b_mx^m}=0$$



$f(x)=\dfrac{2x+6}{x^2-3x+1}$ على الجهة السالبة. لاحظ أنّ الخطّ البياني يقطع مقاربه عند $x=-3$ ، حيث
وصفٌ لما يحدث بعيداً، لا منعٌ للتقاطع.

تذكّر: ثلاثة أسئلة بالترتيب في كلّ نهاية: ما الصيغة، هل هي من صيغ عدم التعيين، وأيّ حيلة ترفع
أخطأ، ومن بدأ بها لم يبق عليه إلّا الحساب.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 29 إلى 32 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.