الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

مبرهنات تخصّ النهايات

خمس مبرهنات لا تعرّف شيئاً جديداً، بل تنقل ما تعرفه عن التوابع إلى المتتاليات

نهاية متتالية . الوحدة 4 . الدرس 2

بسيطة

الدرس السابق أعطاك تعريف النهاية، وعلّمك أن تستخرج منه دليلاً n_0 عند تسامحٍ معطى. لكنّه لا يعطيك نهايةً لم تكن تعرفها مسبقاً. هنا تأتي الأدوات التي تحسب النهاية بدل أن تتحقّق منها. وأوّل ما ينبغي أن تعرفه عنها أنّها ليست جديدة: المتتالية تابعٌ مجموعة تعريفه $\mathbb{N}$ ، فكلّ ما تعرفه عن نهايات التوابع عند $+\infty$ ينتقل إليها. الجديد في هذا الدرس ثلاث مبرهناتٍ للمقارنة، وهي التي تحسم الحالات التي تعجز فيها قواعد الحساب.

من التابع إلى المتتالية

إذا كان الحدّ العامّ مكتوباً بدلالة n وحده، فأنت أمام تابعٍ تنظر إليه عند الأعداد الطبيعيّة فقط. والفكرة كلّها في سطرٍ واحد: ادرس التابع على المتحوّل الحقيقيّ، حيث تملك كلّ أدواتك، ثمّ انقل النتيجة.

مبرهنة 2

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$ ليكن f تابعاً معرّفاً على مجالٍ من النمط $]b,+\infty[$ ، ولتكن $(u_n)_{n\geq n_0}$ متتاليةً معرّفة بدءاً من دليل معيّن n_0 بالصيغة $u_n=f(n)$. حيث يدلُّ ℓ على عددٍ حقيقيّ، أو على $+\infty$ ، أو على $-\infty$.

الكتاب، الصفحة 106

تذكّر: لاحظ ثلاثة شروطٍ في نصّ المبرهنة: المجال من النمط $]b,+\infty[$ أي غير محدودٍ من الأعلى، والتساوي $u_n=f(n)$ بدءاً من دليلٍ معيّن لا بالضرورة من الصفر، ووجود نهاية التابع. والنهاية قد تكون لانهائيّة، فالمبرهنة ليست محصورةً بالحالات المتقاربة.

المثال الأوّل في الكتاب، وهو يبيّن متى تُستعمل المبرهنة: حين تعجز قواعد الحساب. المطلوب: ادرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

$$u_n=\frac{2n^2+5n+1}{n^2+n}$$

1. القواعد وحدها لا تكفي البسط يسعى إلى $+\infty$ ، والمقام كذلك. قاعدة خارج القسمة تعطي صيغةً غير معيّنة، ولا شيء بعدها.

$$\frac{+\infty}{+\infty}$$

2. اكتبها تابعاً نضع n مكان x بالمقلوب: التابع الكسريّ نفسه، لكن على المتحوّل الحقيقيّ. الآن نحن في أرضٍ نعرفها من الوحدة الثانية.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + x}, \qquad u_n = f(n)$$

3. نهاية التابع في الكسر الكثير الحدود نأخذ الحدّ المسيطر في البسط والمقام. النسبة بين معاملَي x^2 هي الجواب.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

4. انقل شروط المبرهنة متحقّقة: التابع معرّفٌ على مجالٍ غير محدودٍ من الأعلى، والتساوي قائمٌ عند كلّ $n \geq 1$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$$

الطريق كلّه ثلاث خطوات: صيغةٌ غير معيّنة، انتقالٌ إلى التابع، نهاية التابع. ولا تُستعمل المبرهنة إلّا في هذا الاتّجاه.

$$u_n = f(n)$$

انتبه: المبرهنة تسير في اتّجاهٍ واحد. من تقارُب المتتالية لا يُستنتج شيءٌ عن التابع: خذ $f(x) = \sin(\pi x)$ ، فيكون $u_n = f(n) = 0$ عند كلّ n ، والمتتالية متقاربة من الصفر، بينما التابع ليست له نهايةٌ عند $+\infty$ أصلاً. المتتالية لا ترى من التابع إلّا النقاط الصحيحة.

التابع f ليست له نهايةٌ عند $+\infty$. ماذا نستنتج عن المتتالية $u_n = f(n)$ ؟

أ) لا شيء. المبرهنة لا تقول شيئاً في هذه الحالة
ب) المتتالية ليست لها نهاية أيضاً
ج) المتتالية تتباعد إلى $+\infty$

أ. نعم. المبرهنة شرطها وجود نهاية التابع، وإذا لم توجد فهي صامتة. قد تتقارب المتتالية وقد لا تتقارب، ويلزمك أداةٌ أخرى، مثل مبرهنة الحصر.

متتالية داخل تابع

الحالة الثانية: الحدّ العامّ ليس تابعاً في n مباشرةً، بل تابعٌ مطبَّقٌ على متتاليةٍ أخرى. جذرٌ فوق كسر، لوغاريتمٌ فوق نسبة، جيبٌ فوق زاوية. عندئذٍ تُحسب النهاية على مرحلتين: أوّلاً ما في الداخل، ثمّ ما في الخارج عند تلك النقطة بالذات.

مبرهنة 3

$\lim_{x\to b} f(x) = c \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = c$ ليكن $\lim_{n\to+\infty} v_n = b,$ f تابعاً معرّفاً على مجالٍ I ، ولتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ متتاليةً تنتمي جميع حدودها إلى I . حيث يمثّل كلٌّ من الرمزين b و c عدداً حقيقيّاً، أو $+\infty$ ، أو $-\infty$.

الكتاب، الصفحة 106

تذكّر: الكتاب يعلّق على هذه المبرهنة بسطرٍ واحد: تماثلُ مثيلتها المتعلّقة بمركَّب تابعين، ولهما الإثبات نفسه، فقط هنا نركِّبُ متتاليةً مع تابع. أي إنّك لا تتعلّم شيئاً جديداً، بل تعيد استعمال ما تعرفه.

مثال الكتاب على التركيب. المطلوب: أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة واحسب نهايتها.

$$u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$$

1. افصل الداخل عن الخارج ما تحت الجذر متتالية، والجذر تابعٌ مطبَّقٌ عليها. نسمّي الداخل v_n ، فتصير المتتالية تركيباً.

$$v_n = \frac{3n+2}{n+1}, \qquad u_n = \sqrt{v_n}$$

2. نهاية الداخل كسرٌ كثيرا حدوده من الدرجة الأولى، فالنهاية هي نسبة معاملَي n .

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+2}{n+1} = 3$$

3. نهاية الخارج عند تلك النقطة وهنا موضع الخطأ الشائع: النقطة التي نقترب منها هي 3 ، لا $+\infty$. التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ مستمرٌّ هناك، فالنهاية هي القيمة.

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$$

4. ركّب جميع حدود (v_n) موجبة، فهي داخل مجال تعريف الجذر، وشرط المبرهنة متحقّق.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{3}$$

أوّلاً الداخل، ثمّ الخارج عند نهاية الداخل. من كتب $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}$ فقد ركّب في المكان الخطأ.

$$\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim_{x\to b} f(x)$$

انتبه: الشرط المكتوب في نصّ المبرهنة هو أنّ جميع حدود (v_n) تنتمي إلى I ، لا أنّ أغلبها ينتمي. قبل أن تضع جذراً أو مقلوباً أو لوغاريتماً فوق متتالية، تحقّق أنّ كلّ حدٍّ يقع في مجال التعريف. في المثال أعلاه مرّ الشرط دون أن يُلاحَظ لأنّ $\dfrac{3n+2}{n+1}$ موجبٌ دائماً.

العمليّات، ومبرهنات الإحاطة

قبل المبرهنات الجديدة، جملةٌ واحدة يقولها الكتاب ثمّ يمضي: قواعد نهاية المجموع والجداء وخارج القسمة تبقى سارية كما هي، ويحيلك إلى الوحدة الأولى. الجديد كلّه في المقارنة.

مبرهنة 4، الحصر

$\lim v_n = \lim w_n = \ell \Longrightarrow \lim u_n = \ell$ ، $w_n \le u_n \le v_n$ الشرط الأوّل عند كلّ n أكبر من عددٍ n_0 . والشرط الثاني: يوجد عددٌ حقيقيٌّ ℓ هو نهاية المتتاليتين معاً. الحدّ ℓ حقيقيٌّ هنا، لا $\pm\infty$.

الكتاب، الصفحة 107

مبرهنة 5، تقدير الخطأ

$\lim e_n = 0 \Longrightarrow \lim u_n = \ell$ ، $|u_n - \ell| \le e_n$ الشرط الأوّل عند كلّ n أكبر من عددٍ n_0 ، والقيمة المطلقة جزءٌ من الشرط لا زينة. و ℓ عددٌ حقيقيّ، والمتتالية (e_n) نهايتها الصفر، لا مجرّد محدودة.

الكتاب، الصفحة 107

مبرهنة 6، المقارنة عند اللانهاية

$\lim u_n = +\infty \Longrightarrow \lim v_n = +\infty$ ، $u_n \le v_n$ الصغرى تدفع الكبرى إلى الأعلى. الشرط عند كلّ n أكبر من n_0 .

$\lim v_n = -\infty \Longrightarrow \lim u_n = -\infty$ ، $u_n \le v_n$ والكبرى تجرّ الصغرى إلى الأسفل. لا يوجد اتّجاهٌ ثالث، والمبرهنة لا تقول شيئاً عن النهايات الحقيقيّة.

الكتاب، الصفحة 107

انتبه: الشروط الثلاثة كلّها تقول «عند كلّ n أكبر من عددٍ n_0»، لا «عند كلّ n». أن تكون المتراجحة خاطئةً عند $n=1$ أو $n=2$ لا يضرّ، ما دمت تذكر الدليل الذي تصير منه صحيحةً بلا انقطاع. الكتاب نفسه يستعمل هذه الفسحة بعد قليل مع $n \geq 4$.

المثال الذي يبيّن لماذا نحتاج المبرهنة الخامسة أصلاً. المطلوب: أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة من الصفر.

$$u_n = \frac{\sin n}{n+1}$$

1. لماذا تعجز قواعد الحساب قاعدة الجداء تحتاج نهايتين. المقام له نهاية، أمّا $\sin n$ فليست له نهايةٌ أصلاً، فالقاعدة لا تنطبق. هذا ليس تعقيداً في الحساب، بل غياب شرط: النهاية المكتوبة أدناه غير موجودة.

$$\lim_{n\to+\infty} \sin n$$

2. ما نعرفه رغم ذلك الجيب لا نعرف إلى أين يذهب، لكنّنا نعرف أين يبقى: بين -1 و 1. وهذا يكفي.

$$|\sin n| \leq 1$$

3. اكتب الشرط بالقيمة المطلقة النهاية المرشَّحة هي الصفر، فالفرق $u_n - 0$ هو u_n نفسه. نقسم المتراجحة أعلاه على $n+1$، وهو موجبٌ فلا تنقلب الجهة.

$$|u_n - 0| = \frac{|\sin n|}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

4. الحاصرة تسعى إلى الصفر وهذا يتبع المتتالية المرجعيّة $\dfrac{1}{n}$ بإزاحة دليلٍ واحد، لا أكثر. بذلك تحقّق شرطا المبرهنة الخامسة معاً.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

حين لا تعرف إلى أين يذهب شيءٌ في البسط، يكفي أن تعرف أنّه محدود. المبرهنة الخامسة تحوّل الحدّ إلى تقديرٍ للخطأ، والخطأ يسعى إلى الصفر.

$$|u_n - \ell| \leq e_n \to 0$$

المتتاليتان (u_n) و (v_n) تحقّقان $u_n \leq v_n$ عند كلّ n ، ونعلم أنّ $\lim v_n = 3$. ماذا نستنتج عن (u_n) ؟

أ) أنّ (u_n) متقاربة ونهايتها أصغر من 3 أو تساويه

ب) لا شيء. لا مبرهنة 4 ولا مبرهنة 6 تنطبق هنا

ج) أنّ $\lim u_n = 3$ أيضاً

ب. نعم. مبرهنة 4 تحتاج حدَّين من الجهتين بالنهاية نفسها، ومبرهنة 6 لا تتكلّم إلّا عن $\pm\infty$. حدٌّ واحدٌ من الأعلى لا يفرض شيئاً.

صيغ عدم التعيين

حين تُدخل النهايتين في القاعدة ويخرج $\infty - \infty$ أو $\dfrac{\infty}{\infty}$ أو $0 \times \infty$ أو $\dfrac{0}{0}$ ، لم تحصل على نتيجةٍ خاطئة، بل لم تحصل على نتيجةٍ أصلاً. الصيغة غير المعيّنة أمرُ عملٍ لا جواب.

مثال الكتاب على الصيغة $+\infty - \infty$. المطلوب: ادرس نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

$$u_n = n - \sqrt{n}$$

1. أين المشكلة كلا الحدّين يسعى إلى $+\infty$ ، والفرق بينهما غير معيّن. لا يجوز أن تقول إنّه صفر ولا إنّه $+\infty$ قبل أن تحسب.

$$\lim n = +\infty$$
$$\lim \sqrt{n} = +\infty$$

2. أخرج الحدّ المسيطر أيّهما ينمو أسرع؟ n أسرع من $\sqrt{n}$ ، فهو المسيطر ونخرجه خارج قوسين. هذه هي الحيلة التي يسمّيها الكتاب «إخراج الحدّ المُسيطر خارج قوسين».

$$u_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

3. الآن الصيغة معيّنة ما في القوس يسعى إلى واحد، وهو عددٌ غير معدوم، والعامل أمامه يسعى إلى $+\infty$. الجداء صار محسوباً.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

المخرَج هو الحدّ الأسرع نموّاً، وعلامة نجاح الخطوة أن يسعى ما في القوس إلى عددٍ غير معدوم. لو أخرجت $\sqrt{n}$ لحصلت على $\sqrt{n}\,(\sqrt{n}-1)$ ، وهو ينتهي أيضاً، لكنّ ما في القوس لا يستقرّ عند عددٍ غير معدوم، فتفوتك علامة النجاح ويطول الطريق.

$$u_n = n\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

الكتاب يعود إلى المتتالية نفسها في فقرة «فَكِّر» ويحلّها ثانيةً بطريقٍ آخر. المطلوب: النتيجة نفسها، لكن بالمقارنة.

$$u_n = n - \sqrt{n}, \quad n \geq 4$$

1. متراجحةٌ تصير صحيحةً بدءاً من دليل عند $n \geq 4$ يكون $\sqrt{n} \geq 2$ ، فالضرب بـ $\sqrt{n}$ يعطي $n \geq 2\sqrt{n}$. عند $n = 1$ هذا خطأ، وهنا تظهر فائدة الشرط «بدءاً من دليل».

$$n \geq 2\sqrt{n}, \qquad n \geq 4$$

2. اطرح الجذر من الطرفين من $n \geq 2\sqrt{n}$ نطرح $\sqrt{n}$ ، فيبقى الطرف الأيسر هو u_n نفسه.

$$u_n = n - \sqrt{n} \geq 2\sqrt{n} - \sqrt{n} = \sqrt{n}$$

3. طبّق مبرهنة 6 الصغرى $\sqrt{n}$ تسعى إلى $+\infty$ ، فهي تدفع الكبرى معها. لاحظ الاتّجاه: الصغرى هي التي تدفع.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

نتيجةٌ واحدة، طريقان: الجبر بإخراج الحدّ المسيطر، والمقارنة بمتتاليةٍ أبسط. في الامتحان يفتح لك الطريقان بابين، فإذا أُغلق أحدهما جرّب الآخر.

$$u_n \geq \sqrt{n}, \qquad n \geq 4$$

انتبه: الكتاب يقول صراحةً على الصفحة التاسعة بعد المئة: ليس ثمّة قواعد عامّة لصيغ عدم التعيين. ما يوجد حيلتان اثنتان، الانتقال إلى التابع وإخراج الحدّ المسيطر. من انتظر قاعدةً تُحفظ فقد انتظر ما لا يأتي.

حين تكون المتتالية تدريجيّة

بقيت حالةٌ واحدة: $u_{n+1} = f(u_n)$. هنا لا يوجد حدٌّ عامٌّ بدلالة n نضعه في تابع، فلا مبرهنة 2 ولا 3 تنطبقان مباشرةً. ومع ذلك تكفي مبرهنة 3 لاستخراج نتيجةٍ قويّة.

استنتاج الكتاب في فقرة «تكريساً للفهم». المطلوب: إذا كانت للمتتالية التدريجيّة نهايةٌ حقيقيّة، فماذا نعرف عنها؟

$$u_{n+1} = f(u_n)$$
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

1. أدخل النهاية في التابع إذا كان f مستمرّاً عند ℓ ، أي $\lim_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$ ، فمبرهنة 3 تسمح بتمرير النهاية إلى الداخل.

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

2. والمتتالية المزاحة لها النهاية نفسها حدود (u_{n+1}) هي حدود (u_n) نفسها، بلا الحدّ الأوّل. حذف حدٍّ واحدٍ لا يغيّر نهاية.

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$$

3. والمتتاليتان واحدة العلاقة التدريجيّة تقول إنّ $(f(u_n))$ و (u_{n+1}) هما المتتالية نفسها، حدّاً بحدّ. ومتتاليتان متساويتان لهما النهاية نفسها.

$$f(\ell) = \ell$$

النهاية، إن وُجدت، حلٌّ للمعادلة $f(x) = x$. تُسمّى نقطةً صامدة، وهي التي لا يحرّكها التابع.

$$f(x) = x$$

انتبه: اقرأ أوّل كلمةٍ في الإطار: «إذا كانت للمتتالية نهايةٌ حقيقيّة». الاستنتاج يفترض التقارب ولا يبرهنه. من حلّ $f(x) = x$ فقد وجد مرشّحين، لا نهاية. ولو كان للمعادلة حلّان، لزمك دليلٌ إضافيّ لتقول أيّهما تبلغه المتتالية. إثبات التقارب نفسه موضوع الدرس التالي.

المتتالية $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ مع $u_0 = 1$. المعادلة $x = \sqrt{1+x}$ لها حلٌّ موجبٌ واحد. ماذا أثبتنا؟

أ) أنّ المتتالية متقاربة، ونهايتها هذا الحلّ
ب) أنّ المتتالية متقاربة، لأنّ للمعادلة حلّاً
ج) أنّها إن كانت متقاربة فنهايتها هذا الحلّ، لا أكثر

ج. نعم، وهذه هي الصيغة الدقيقة. الاستنتاج شرطيّ. إثبات التقارب يحتاج أداةً أخرى، وهي الاطراد مع الحدّ، وتأتي في الدرس التالي.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 106 إلى 109 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.