الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

البرهان بالتدريج، أو بالاستقراء الرياضي

بسيطة

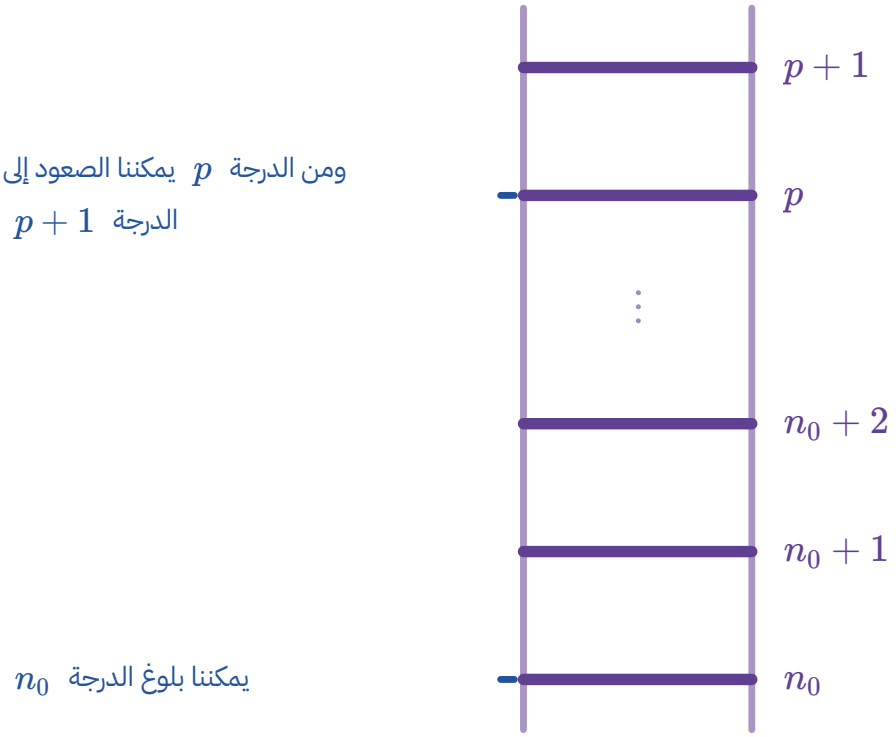
خطوتان تُثبتان ما لا يُحصى: أن تصل إلى الدرجة القاعديّة، وأن تصعد من كلّ درجةٍ إلى التي تليها

تذكرة بالمتتاليات، والإثبات بالتدريج . الوحدة 1 . الدرس 2

خذ المساواة $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ وجرّبها: عند $n = 1$ تعطي $1 = 1$ ، وعند $n = 2$ تعطي $9 = 9$ ، وعند $n = 3$ تعطي $36 = 36$. ثلاث مرّات صحيحة. فهل هي صحيحةٌ دائماً؟ لا نملك أن نتحقّق عدداً غير منتهٍ من المرّات، ومن هنا يبدأ هذا الدرس.

السُّلَّم، والمبدأ

تخيّل سُلَّماً درجاته مرقّمة. تريد أن تصل إلى كلّ درجةٍ دليلها $n \geq n_0$. يكفيك أمران: أن تتمكّن من بلوغ الدرجة القاعديّة n_0 ، وأن تتمكّن من الصعود من أيّة درجةٍ p إلى التي تعلوها مباشرةً $p + 1$. عندئذٍ تبلغ كلّ درجةٍ فوق القاعديّة، مهما علت.



مبدأ الإثبات بالتدريج

لإثبات صحّة خاصّةٍ $E(n_0)$ تتعلّق بالعدد الطبيعيّ n في حالة $n \geq n_0$: ① نثبت صحّة الخاصّة في الحالة القاعديّة $n = n_0$.

② نثبت في حالة $p \geq n_0$ أنّ صحّة $E(p)$ تقتضي صحّة $E(p+1)$. $\forall p \geq n_0 : E(p) \Rightarrow E(p+1)$

وعندها نستنتج صحّة الخاصّة $E(n)$ أيّاً كانت قيمة n أكبر من n_0 أو تساويه. $\forall n \geq n_0 : E(n) \Longrightarrow$

الكتاب، الصفحة 12

انتبه: الخطوة ② وحدها لا تكفي. من يقدر على الصعود درجةً واحدة ولا يبلغ القاعديّة أبداً، لا يصل إلى شيء. ومن تحقّق من ثلاث حالاتٍ فقط لم يبرهن، بل وجد السبب الذي يجعله يحتاج إلى التدريج.

ما الذي يضمنه المبدأ إذا صحّت الخطوة ② وحدها من دون الحالة القاعديّة؟

> **كيف أبدأ؟** انظر إلى الخطوة ② وحدها: هي جملةٌ شرطيّة، تنقل الصحّة من درجةٍ إلى التي تليها. اسأل نفسك ماذا تُنتج جملةٌ شرطيّة إن لم يتحقّق شرطها عند أيّ درجة.

أ) لا شيء، فقد لا تصحّ الخاصّة عند أيّ عدد

ب) تصحّ الخاصّة عند كلّ $n \geq n_0$

ج) تصحّ عند n_0 وحدها

أ. نعم. الانتقال ينقل الصحّة من درجةٍ إلى التي تليها، فإن لم تصحّ عند أيّ درجةٍ ابتداءً، لم يكن هناك ما يُنقل.

كيف نستعمله استعمالاً صحيحاً

نستعمل البرهان بالتدريج حين نريد إثبات خاصّةٍ تتبع متحوّلاً طبيعيّاً n يتحوّل في $\mathbb{N}$ أو في مجموعةٍ من النمط $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$. ويجري الإثبات وفق ثلاث خطوات، والأولى منها ليست في الصياغة المختصرة أعلاه.

الخطوات الثلاث كما يعدّدها الكتاب في رُكن «تكريساً للفهم». المطلوب: إثبات خاصّةٍ $E(n)$ في حالة $n \geq n_0$.

$$E(n),\ n \geq n_0$$

1. ① اكتب الخاصّة وحدّد الدليل الابتدائيّ أوّلاً نكتب وبوضوح الخاصّة $E(n)$ التي نرغب في إثبات صحّتها، ونقول من أيّ دليلٍ تبدأ. وفي أغلب الأحيان يكون $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$. من لا يكتب ما تقوله $E(n)$ بالضبط، لن يستطيع لاحقاً أن يتحقّق أنّ السطر الذي وصل إليه هو $E(n+1)$.

2. ① تحقّق من الحالة القاعديّة نثبت صحّة الخاصّة عند $n = n_0$ ، أي صحّة $E(n_0)$. تُفحص الدرجة التي منها تبدأ الخاصّة، لا درجةٌ أخرى.

$$E(n_0)$$

3. ② افترض، ثمّ برهن نفترض صحّة $E(p)$ في حالة عددٍ $p \geq n_0$ ، ونبرهن صحّة $E(p+1)$. الفعلان مختلفان عن قصد: $E(p)$ مفروضة، و $E(p+1)$ مطلوبة. والبرهان لا ينتهي إلّا حين يصير السطر الأخير هو $E(p+1)$ تحديداً، وقد استُعمل فيه الافتراض.

الخطوة ② ليست تحقّقاً إضافيّاً من حالةٍ واحدة، بل إثبات انتقال. إن لم يظهر الافتراض في سطور الحساب، فما جرى ليس تدريجاً.

$$E(p) \Rightarrow E(p+1)$$

تذكّر: الصياغة العامّة تستعمل الحرف p للمفروض كي يبقى n حرّاً، والكتاب نفسه يكتب n في المثالين. كلاهما مقبول؛ غير المقبول أن تخلط الحرفين في برهانٍ واحد.

في الخطوة ②، ما المفروض وما المطلوب؟

كيف أبدأ؟ لا تُجب من الذاكرة. عُد إلى نصّ الخطوة ② وابحث عن الفعلين اللذين يفصلان الأمرين، ثمّ انظر ما يلي كلًّا منهما.

أ) المفروض $E(p+1)$ والمطلوب $E(p)$

ب) المفروض $E(p)$ والمطلوب $E(p+1)$

ج) المفروض صحّة $E(n)$ عند كلّ n

ب. نعم، وهذا ما يفصله الفعلان: «نفترض» للمفروض، «نبرهن» للمطلوب.

المثال الأوّل: مجموع المكعّبات

أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعيّ الموجب تماماً n كانت المساواة الآتية محقّقة.

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

الحلّ، بالخطوات الثلاث نفسها.

$$n_0 = 1$$

1. ⓪ الخاصّة والدليل الابتدائيّ الخاصّة $E(n)$ المطلوبة هي المساواة $1^3+2^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ، ونريد إثبات صحّتها في حالة $n\geq 1$.

2. ① الحالة القاعديّة الخاصّة $E(1)$ صحيحة، لأنّها تنصّ على مساواةٍ واضحة.

$$1^3=\frac{1^2(1+1)^2}{4}=1$$

3. ② الافتراض والانتقال نفترض أنّ $E(n)$ صحيحة. نضيف $(n+1)^3$ إلى الطرفين، ونستبدل المجموع الأوّل بما يعطيه الافتراض.

$$1^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3$$

4. والآن نُخرج العامل المشترك نُخرج $\dfrac{(n+1)^2}{4}$ عاملاً مشتركاً، فيبقى بين القوسين ثلاثيّ الحدود n^2+4n+4 ، وهو مربّعٌ كامل.

$$=\frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4n+4\right)=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

وهذه هي تحديداً الخاصّة $E(n+1)$: ضع $n+1$ مكان n في $E(n)$ وقارن. أثبتناها اعتماداً على صحّة $E(n)$ ، إذن $E(n)$ صحيحة مهما كان n طبيعيّاً موجباً تماماً.

$$E(n+1):\ 1^3+2^3+\cdots+(n+1)^3=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

تذكّر: الآن أجب عن سؤال البداية: من المتتالية الحسابيّة نعرف $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ ، فمربّعه $\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$ ، وهو ما أثبتناه. إذن $1^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

لماذا لا يكفي أن نصل إلى تعبيرٍ يشبه $E(n+1)$ ؟

> **كيف أبدأ؟** اسأل أوّلاً: ما هي $E(n+1)$ بالضبط؟ اكتبها بوضع $n+1$ مكان n في $E(n)$. ثمّ قارن بين أن «يشبه» التعبيرُ هذه الخاصّة وأن «يكون» هو إيّاها.

أ) لأنّ الحساب يصير أطول

ب) لأنّ الكتاب يفضّل صيغةً معيّنة

ج) لأنّ $E(n+1)$ عبارةٌ محدّدة، والوصول إلى غيرها لا يثبتها

ج. نعم. الكتاب يقول «وهذه هي تحديداً الخاصّة $E(n+1)$ »، والكلمة الحاسمة هي «تحديداً».

المثال الثاني: خاصّةٌ ليست مساواة

الخاصّة $E(n)$ ليست بالضرورة مساواة. أثبت أنّه مهما كان العدد الطبيعيّ n كان 4^n+2 مضاعفاً للعدد 3 . هنا الدليل الابتدائيّ $n_0=0$ ، لا 1 .

الحلّ. لاحظ أنّ الحيلة كلّها في إظهار المقدار المفروض داخل الحساب.

$$n_0=0$$

1. ⓪ الخاصّة والدليل الابتدائيّ الخاصّة $E(n)$ المطلوبة هي: 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3 . وهي قضيّة قابليّة قسمة، لا مساواة، والدليل الابتدائيّ هو $n_0=0$.

2. ① الحالة القاعديّة عند الصفر الخاصّة $E(0)$ صحيحة، لأنّ $4^0+2=1+2=3$ ، وهو مضاعفٌ للعدد 3 . تُفحص الدرجة 0 لأنّ الخاصّة تبدأ منها، لا الدرجة 1 .

3. ② أظهر المفروض داخل الحساب نفترض أنّ 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3 ، ثمّ نُعيد كتابة $4^{n+1}+2$ بحيث يظهر فيه المقدار المفروض نفسه.

$$4^{n+1}+2=4\cdot 4^n+2=4(4^n+2)-8+2=4(4^n+2)-6$$

4. والخلاصة من فرق مضاعفين بحسب افتراضنا 4^n+2 مضاعفٌ للعدد 3 ، فـ $4(4^n+2)$ مضاعفٌ له أيضاً. و 6 مضاعفٌ للعدد 3 . وفرق مضاعفين للعدد 3 مضاعفٌ للعدد 3 ، فالقضيّة $E(n+1)$ صحيحة.

إذن $E(n)$ صحيحة مهما كان n طبيعيّاً. وانظر ما فعلته الخطوة ②: لم تحسب شيئاً جديداً، بل أعادت ترتيب المقدار حتّى ظهر فيه المفروض.

$$4(4^n+2)-6$$

انتبه: لا تتحقّق من قابليّة القسمة بالأرقام وحدها. أن يكون 4^0+2 و 4^1+2 و 4^2+2 مضاعفاتٍ للعدد 3 لا يثبت شيئاً عن باقي الأعداد؛ هذا بالضبط ما بدأ به هذا الدرس.

في المثال الثاني، لماذا فُحصت الحالة $n = 0$ وليس $n = 1$ ؟

> **كيف أبدأ؟** ارجع إلى سطر الخاصّة في المثال الثاني وابحث عن n_0 ، أي الدرجة التي تُصاغ الخاصّة ابتداءً منها. ثمّ قارنها بالمثال الأوّل: ما الذي تغيّر بين المثالين؟

أ) لأنّ الخاصّة تبدأ من $n_0 = 0$

ب) لأنّ الحساب عند 0 أسهل

أ. نعم. تُفحص دائماً الدرجة التي منها تبدأ الخاصّة. المثال الأوّل بدأ من 1 ، وهذا من 0 .

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 12 إلى 14 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.