الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

التابع اللّوغاريتمي النيبري

تابعٌ واحدٌ لا غير يحقّق شرطين اثنين، ومنهما تخرج إشارتُه وترتيبُه وطريقةُ حلّ معادلاته

التابع اللّوغاريتمي . الوحدة 5 . الدرس 1

تعرف من وحدة الاشتقاق كيف تنتقل من تابعٍ إلى مشتقّه. والسؤال المعاكس أصعب: أُعطيتَ المشتق، فما التابع؟ خذ أبسط ما يخطر لك، التابع الذي مشتقّه $\frac{1}{x}$. لن تجده بين التوابع التي بين يديك، لا بين كثيرات الحدود ولا بين الجذور ولا بين النسب. هنا يفتح الكتاب باباً جديداً: يعلن أنّ مثل هذا التابع موجود، وأنّه واحدٌ لا غير إذا أضفنا شرطاً واحداً يثبّته، وهو أن ينعدم عند الواحد. من هذين الشرطين وحدهما، من دون أيّ صيغة صريحة، تخرج كلّ خواصّ هذا الدرس: أين يكون موجباً، ولماذا يحفظ الترتيب، وكيف تُحلّ معادلةٌ أو متراجحة يظهر فيها.

تابعٌ واحدٌ لا غير

لن نبدأ هذا الدرس بصيغةٍ صريحة، لأنّه لا توجد صيغة صريحة. نبدأ بشرطين، ونعلن أنّ تابعاً واحداً لا غير يحقّقهما معاً على المجال $]0, +\infty[$.

مبرهنة وتعريف 1

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$ الشرط الأوّل: التابع اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ ومشتقّه هو $x \mapsto \frac{1}{x}$.

$\ln(1) = 0$ الشرط الثاني: ينعدم عند $x = 1$. وهو الذي يثبّت التابع ويجعله وحيداً.

الكتاب، الصفحة 135

يسمّى هذا التابع تابع اللّوغاريتم النيبري أو الطّبيعي، ونرمز إليه بالرمز $\ln$. وبوجه عام يُكتفى بتسميته التابع اللّوغاريتمي إذا لم يكن هناك أيّ التباس، وهذا ما سنفعله في بقيّة الوحدة.

تذكّر: لماذا شرطان لا شرطٌ واحد؟ لأنّ الشرط الأوّل وحده لا يكفي. لو كان $\ln$ حلاًّ له لكان $\ln + 5$ حلاًّ أيضاً، فمشتقّهما واحد. الشرط الثاني هو الذي يختار واحداً من بين هذا العدد اللانهائي من التوابع، تماماً كما تختار نقطةٌ واحدة مستقيماً من بين المستقيمات المتوازية.

قديماً كانت قيم هذا التابع مُجدولةً في جداول تسمّى الجداول اللّوغاريتمية، أمّا اليوم فنجده مُبرمجاً في الآلة الحاسبة والحاسوب، ونحصل على قيمه بلمسة زرّ واحد.

$$\ln 2 \approx 0.693, \qquad \ln 3 \approx 1.098$$

انتبه: القيمة الثانية منقولة عن الكتاب كما هي، وفيها قصٌّ لا تقريب: $\ln 3 = 1.0986\ldots$ ، فتقريبها إلى ثلاث مراتب عشريّة هو 1.099 لا 1.098 . القيمة الأولى سليمة لأنّ القصّ والتقريب يتّفقان عندها. أثبتناها هنا كما طبعها الكتاب لتتعرّف عليها في صفحته، واعلم أنّ الصحيح 1.099 .

نتائج مباشرة: المجال، الاشتقاق، الاطّراد

كلّ ما يأتي في هذا المقطع نتيجةٌ مباشرة للشرطين، ولا يحتاج إلى أيّ معلومة جديدة.

نتائج مباشرة

$D_{\ln} = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$ مجموعة التعريف. لاحظ أنّ الصفر خارجٌ منها، وكلّ عددٍ سالب كذلك.

$\ln'(x) = \frac{1}{x}$ التابع $\ln$ اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}_+^*$.

الكتاب، الصفحة 135

ويتبع الاشتقاقُ الاستمرارَ: التابع $\ln$ مستمرٌّ على $\mathbb{R}_+^*$ ، لأنّ كلّ تابعٍ اشتقاقيٍّ على مجالٍ مستمرٌّ عليه.

ومن الاشتقاق تخرج جهة الاطّراد في سطرٍ واحد: إذا كانت $x > 0$ فإنّ $\frac{1}{x} > 0$ ، ومن ثَمّ $\ln'(x) > 0$. فالتابع $\ln$ متزايدٌ تماماً على $\mathbb{R}_+^*$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln' x$	‖	$+$	1	$+$	
$\ln x$	‖	$\nearrow -$	0	$\nearrow +$	$\nearrow$

تذكّر: اقرأ الجدول في سطرين. سطر المشتق يحمل الإشارة $+$ على المجال كلّه، فالأسهم صاعدة كلّها. وسطر التابع يحمل شيئاً زائداً: الإشارة $-$ قبل الواحد و $+$ بعده. هذه إشارة $\ln x$ نفسه، لا إشارة مشتقّه، ولا تخلط بينهما: التابع صاعدٌ في المجال كلّه وسالبٌ في نصفه الأوّل.

أمّا الشرطة المزدوجة عند الصفر فتقول إنّ التابع غير معرّف هناك، لا أنّه ينعدم. الصفر حدٌّ خارجٌ عن المجال، والجدول يبدأ بعده.

إشارة اللوغاريتم، ورمز التكافؤ

اجمع الآن معلومتين: التابع $\ln$ متزايدٌ تماماً، وقيمته عند الواحد صفر. تكفي هاتان لتحديد إشارته عند كلّ نقطة، من دون حساب أيّ قيمة.

إشارة اللوغاريتم

$\ln x = 0 \iff x = 1$ نقطة الانعدام وحيدة، لأنّ التابع لا يعود إلى قيمةٍ سبق أن أخذها.

$\ln x < 0 \iff x \in]0, 1[$ قبل الواحد، أي بين الصفر والواحد.

$\ln x > 0 \iff x \in]1, +\infty[$ بعد الواحد.

الكتاب، الصفحة 135

تذكّر: هذا أوّل لقاء لك بالرمز $\iff$ في هذا الكتاب، وهو رمز التكافؤ بين خاصّتين: صحّة أيٍّ منهما تقتضي صحّة الأخرى. فقولنا $\ln x = 0 \iff x = 1$ يعني أمرين معاً: إن كان $x = 1$ فاللوغاريتم صفر، وإن كان اللوغاريتم صفراً فليس أمام x إلّا أن يساوي الواحد. الرمز $\implies$ يقول واحداً من الاتّجاهين فقط.

انتبه: لا تقرأ السطر الثاني على أنّه x سالب. المجال $]0, 1[$ كلّه موجب. الذي يكون سالباً هو اللوغاريتم لا العدد، وهذا بالضبط ما يخلط فيه كثيرون: التابع موجب المدخل دائماً، وقد يكون سالب المخرج.

ما إشارة $\ln(0.4)$ ؟

أ) موجبة

ب) سالبة

ج) غير معرّفة

ب. نعم، لأنّ $0.4 \in]0, 1[$. لم نحتج إلى آلةٍ حاسبة، بل إلى موقع العدد من الواحد فقط.

اللوغاريتم يحفظ المساواة والترتيب

التزايد التامّ يعطينا أكثر من الإشارة. إنّه يعطينا حقّ المقارنة: لأنّ التابع لا يعود أدراجه أبداً، فترتيب العددين هو نفسه ترتيب لوغاريتميهما، والعكس بالعكس.

المقارنة بين عددين موجبين تماماً

$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$ اللوغاريتم يحافظ على المساواة، في الاتّجاهين.

$\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$ ويحافظ على الترتيب، من دون قلب الإشارة.

$\ln(a) > \ln(b) \iff a > b$ وهذه هي السابقة نفسها مقروءةً بالمقلوب.

الكتاب، الصفحة 136

انتبه: الشرط المكتوب فوق الإطار ليس زينة: a و b موجبان تماماً. من دونه لا معنى للطرفين أصلاً، ومن نسيه حصل على نتائج تبدو سليمة وهي بلا معنى. سنبني على هذا الشرط الطريقة كلّها في المقطع الأخير.

ولنر كيف تعمل هذه القاعدة في حالة عمليّة. في حالة $x > 2$ ، تكافئ المتراجحة $\ln(x-2) > 0$ المتراجحةَ $x - 2 > 1$ ، أي $x > 3$ ، أو $x \in]3, +\infty[$. وبالمثل تكافئ $\ln(x-2) < 0$ الشرطَ $0 < x - 2 < 1$ ، أي $2 < x < 3$ ، أو $x \in]2, 3[$.

تذكّر: لاحظ ما جرى: الصفر على يمين المتراجحة هو $\ln 1$. فقولك $\ln(x-2) > 0$ هو قولك $\ln(x-2) > \ln 1$ ، ومن هنا يأتي $x - 2 > 1$. كلّما رأيت صفراً في مواجهة لوغاريتم، فاقرأه $\ln 1$.

أيّ العددين أكبر: $\ln 7$ أم $\ln 5$ ؟ ولماذا؟

أ) $\ln 7 < \ln 5$

ب) لا يمكن الحكم من دون آلةٍ حاسبة

ج) $\ln 7 > \ln 5$

ج. نعم، لأنّ $7 > 5$ والتابع متزايدٌ تماماً. لا حاجة إلى معرفة القيمتين.

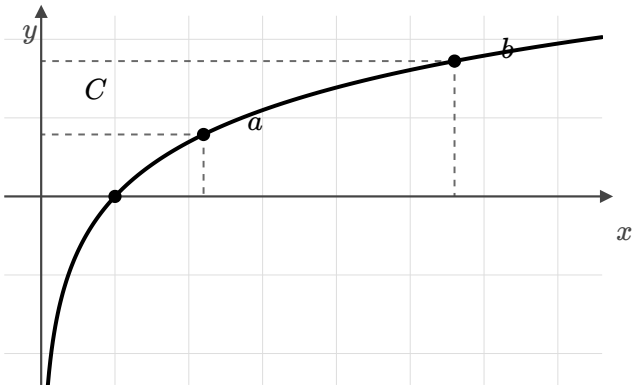
متى يكون التعبير معرّفاً؟

لماذا علينا الحذر عند التعامل مع لوغاريتم عبارةٍ متحوّلة؟ لأنّ الأعداد الموجبة تماماً وحدها لوغاريتماتها معرّفة. فقبل أن تكتب سطراً واحداً من الحساب، اسأل: على أيّ قيم x يكون ما داخل اللوغاريتم موجباً تماماً؟

الكتابة $\ln(x^2 - 1)$ ليس لها معنىً إلّا في حالة $x^2 - 1 > 0$ ، أي $x < -1$ أو $x > 1$. والكتابة $\ln\left(\dfrac{x}{1-x}\right)$ ليس لها معنىً إلّا في حالة $\dfrac{x}{1-x} > 0$ ، أي $x \in]0, 1[$. والكتابة $\ln|x^2 + 2x|$ ليس لها معنىً إلّا في حالة $x^2 + 2x \neq 0$ ، أي $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

انتبه: المثال الثاني هو الفخّ: شرطُ الكسر ليس أن يكون البسط موجباً والمقام موجباً، بل أن يكون الكسر كلّه موجباً. وهذا يحدث أيضاً حين يكون الاثنان سالبين. من قطع الشرطين بدل أن يدرس إشارة الكسر ضيّع نصف الجواب في مسائل أخرى.

تذكّر: وانظر إلى المثال الثالث: القيمة المطلقة تغيّر السؤال كلّه. الشرط لم يعد الإيجاب بل عدم الانعدام، لأنّ $|u| > 0$ يكافئ $u \neq 0$. هذه هي الحيلة التي يستعملها الكتاب ليوسّع مجال التعريف، وستعود في درس المشتق.



الخطّ البياني C يجمع خواصّ الدرس في صورةٍ واحدة: يقطع محور الفواصل عند 1 ، ولا يوجد له أثر على يسار الصفر، وهو صاعدٌ دائماً. ولأنّ $a < b$ فإنّ $\ln a < \ln b$.

عيّن قيم x التي تجعل المقدار $\ln(x^2)$ معرّفاً.

أ) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

ب) $]0, +\infty[$

ج) $\mathbb{R}$

أ. نعم. الشرط $x^2 > 0$ يتحقّق عند كلّ عددٍ حقيقيٍّ عدا الصفر، لأنّ $0^2 = 0$ وليس موجباً تماماً.

طريقة حلّ المعادلات والمتراجحات اللوغاريتمية

لنجمع كلّ ما سبق في طريقةٍ واحدة. ليكن g و h تابعين للمتحوّل x . استناداً إلى خواصّ التابع اللّوغاريتمي، تكافئ المعادلة $\ln g(x) = \ln h(x)$ الشروط $g(x) > 0$ و $h(x) > 0$ و $g(x) = h(x)$ معاً. وتكافئ المتراجحة $\ln g(x) \leq \ln h(x)$ الشروط $g(x) > 0$ و $h(x) > 0$ و $g(x) \leq h(x)$ معاً.

الطريقة

أوّلاً: مجموعة القيم التي تجعل الطرف الأيمن معرّفاً. $E_g = \{x \mid g(x) > 0\}$

$E_h = \{x \mid h(x) > 0\}$ ثانياً: وبالمثل للطرف الآخر.

$E = E_g \cap E_h$ ثالثاً: مجموعة تعريف المعادلة أو المتراجحة، أي القيم التي يتحقّق عندها الشرطان في آنٍ معاً.

$\mathcal{S} = \{x \in E \mid g(x) = h(x)\}$ رابعاً: نحلّ في $\mathbb{R}$ من دون قيد، ثمّ لا نحتفظ إلّا بالحلول التي تنتمي إلى E .

الكتاب، الصفحة 137

انتبه: الخطوة الرابعة هي التي تُنسى، وهي التي تُصحَّح عليها الدرجات. حلُّ $g(x) = h(x)$ وحده ليس جواباً، بل قائمة مرشّحين. الجواب هو ما بقي منهم بعد عرضهم على E ، وقد لا يبقى أحد.

ويعرض الكتاب طريقةً أقصر تعطي النتائج نفسها: عيّن E_g وحدها، حيث g هو التابع الأصغر في المتراجحة، ثمّ احتفظ من حلول $g(x) = h(x)$ أو $g(x) \leq h(x)$ بما ينتمي إلى E_g . ويطلب منك تعليل ذلك من دون أن يذكر التعليل، فإليك إيّاه.

تذكّر: التعليل سطرٌ واحد: إذا كان $g(x) > 0$ وكان $g(x) \leq h(x)$ ، فإنّ $h(x) > 0$ من تلقاء نفسه، لأنّ ما هو أكبر من عددٍ موجب موجبٌ بالضرورة. فشرط E_h لا يضيف شيئاً، وقد تحقّق مجّاناً. وفي حالة المساواة أوضح: إذا كان $g(x) = h(x)$ فالشرطان شرطٌ واحد.

انتبه: لكنّ الاختصار ينهار إذا أخذت التابع الخطأ. لو عيّنت E_h وحدها في المتراجحة $g(x) \leq h(x)$ لما لزم من $h(x) > 0$ أن يكون $g(x) > 0$ ، فالأصغر قد يكون سالباً. القاعدة إذن: في المتراجحة خذ مجموعة تعريف التابع الأصغر، أي الذي في الطرف الأصغر.

هذا المثال الأوّل من مثالَي الكتاب على الصفحة 137 . وهو حالة مساواة، وفيه يظهر بوضوح لماذا لا يكفي حلّ المعادلة الجبريّة وحدها.

$$\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$$

1. مجموعة تعريف الطرف الذي نختاره لدينا حالة مساواة، فيكفي طرفٌ واحد. نختار $g(x) = 3x - 4$ لأنّه من الدرجة الأولى وشرطه أسهل. وهو موجبٌ تماماً عندما يكون $3x > 4$.

$$E_g = \left]\tfrac{4}{3}, +\infty\right[$$

2. الحلّ في $\mathbb{R}$ من دون قيد نساوي ما داخل اللوغاريتمين، ونُرجع كلّ شيء إلى طرفٍ واحد ثمّ نحلّل.

$$3x - 4 = x^2 - 4 \iff x^2 - 3x = 0 \iff x(x-3) = 0$$

3. المرشّحان للمعادلة الجبريّة حلّان. وهنا تبدأ الخطوة التي تفصل الجواب الصحيح عن الجواب الناقص: نعرض كلّ واحدٍ منهما على E_g .

$$x_1 = 0 \notin E_g, \qquad x_2 = 3 \in E_g$$

4. الجواب الحلّ $x_1 = 0$ مرفوض لأنّه لا ينتمي إلى مجموعة التعريف: عنده يصير الطرف الأوّل $\ln(-4)$ ، وهو بلا معنى. فللمساواة حلٌّ وحيد. وللتحقّق: عند $x = 3$ يصير الطرفان $\ln 5$ و $\ln 5$.

$$\mathcal{S} = \{3\}$$

المعادلة اللوغاريتمية ليست منتهيةً عند إيجاد المرشّحين، بل عند عرضهم على مجموعة التعريف. وقد تكون مجموعة الحلول خالية.

$$\mathcal{S} = \{x \in E \mid g(x) = h(x)\}$$

وهذا المثال الثاني، على الصفحتين 137 و 138 . وهو متراجحة، فينطبق عليه شرط التابع الأصغر: الطرف الأصغر هو $x^2 - 4$ ، فمجموعة تعريفه هي التي نعيّنها.

$$\ln(x^2 - 4) \leq \ln(-3x)$$

1. مجموعة تعريف التابع الأصغر نأخذ $g(x) = x^2 - 4$ لأنّه في الطرف الأصغر. وهو موجبٌ تماماً خارج المجال $[-2, 2]$ ، فالمجموعة اجتماع مجالين لا مجالٌ واحد.

$$E_g =]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$$

2. حلّ المتراجحة الجبريّة نُرجع كلّ شيء إلى طرفٍ واحد فنحصل على ثلاثيّ حدود من الدرجة الثانية، ثمّ نحلّله. جذراه -4 و 1 ، ومعامل x^2 موجب، فالمقدار سالبٌ بين الجذرين.

$$x^2 - 4 \leq -3x \iff (x+4)(x-1) \leq 0 \iff x \in [-4, 1]$$

3. التقاطع مع مجموعة التعريف نحتفظ من المجال $[-4,1]$ بما ينتمي إلى E_g . الجزء الموجب $]2,+\infty[$ لا يلتقي به أصلاً، ويبقى الجزء الذي يسبق -2 .

$$[-4,1]\cap E_g=[-4,-2[$$

4. الجواب والتحقّق هذه هي مجموعة حلول المتراجحة المعطاة. وللتحقّق خذ $x=-3$: يصير الطرفان $\ln 5$ و $\ln 9$ ، والأوّل أصغر فعلاً. ولاحظ أنّ -4 داخلة لأنّ المتراجحة غير قطعيّة، وأنّ -2 خارجة لأنّ الطرف الأصغر ينعدم عندها.

$$\mathcal{S}=[-4,-2[$$

في المتراجحة اللوغاريتمية عيّن مجموعة تعريف التابع الأصغر وحدها، ثمّ اقطعها بحلول المتراجحة الجبريّة. أخذُ التابع الأكبر بدلاً منه خطأٌ لا اختصار.

$$g(x)>0,\ g(x)\le h(x)\ \Longrightarrow\ h(x)>0$$

تذكّر: وزنُ هذا الدرس في البكالوريا أكبر ممّا يوحي حجمه: مجموعة التعريف بندٌ مستقلٌّ في كلّ سلّم تصحيحٍ قرأناه، وحلّ معادلةٍ أو متراجحةٍ لوغاريتمية هدفٌ معلنٌ في دليل المعلّم. من أتقن الخطوات الأربع ضمن درجاتٍ لا يمكن أن تُنتزع منه.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 135 إلى 138 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.