الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

نهايات مهمّة تتعلّق بالتابع اللّوغاريتمي

ثلاث نهايات تُحفظ، وأربع تتبعها، وبها تُحلّ حالات عدم التعيين

التابع اللّوغاريتمي . الوحدة 5 . الدرس 5

عرفنا في الدرس الثالث أنّ اللوغاريتم يصعد إلى اللانهاية. لكنّ السؤال الحقيقيّ في المسائل ليس إلى أين يصعد، بل بأيّ سرعة. فإذا التقى $\ln x$ بالعدد x في كسرٍ واحد، أيّهما يغلب؟ الجواب هو مضمون هذا الدرس: اللوغاريتم يصعد أبطأ من كلّ شيء تقريباً، وهذا البطء هو الذي يحسم حالات عدم التعيين. ثلاث نهايات تكفي لتحفظها، ومنها تخرج أربع أخرى بقلبٍ أو بإزاحة، وبها تُحلّ كلّ نهايةٍ تجمع لوغاريتماً بكثير حدود.

النهايات الثلاث الأساسيّة

مبرهنة 4

$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ قرب الصفر يسلك $\ln(1+x)$ سلوك x نفسه. المجال هنا $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$.

$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ اللوغاريتم يصغر أمام x عند اللانهاية. هذه هي النهاية الأشهر في الوحدة.

$\lim_{x\to 0,\ x>0} (x\ln x) = 0$ الصفر يغلب اللانهاية هنا: x يسعى إلى الصفر أسرع ممّا ينزل $\ln x$.

الكتاب، الصفحة 147

والبرهان الأوّل أقصر ممّا تتوقّع، لأنّه ليس حساب نهايةٍ أصلاً بل قراءةٌ لتعريف العدد المشتق. تذكّر أنّ نسبة التغيّر بين 1 و $1+x$ هي فرق القيمتين على فرق الفاصلتين.

برهان الكتاب للنهاية الأولى، الصفحة 147 . التابع $\ln$ اشتقاقيٌّ عند 1 ، وهذه المعلومة وحدها تكفي.

$$t(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}$$

1. نسبة التغيّر عند الواحد نعرّف نسبة التغيّر للتابع $\ln$ بين الفاصلة 1 والفاصلة $1+x$ ، حيث x من $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. وبما أنّ $\ln(1)=0$ يختصر البسط.

$$t(x)=\frac{\ln(1+x)-\ln(1)}{x}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

2. قراءة التعريف ونهاية نسبة التغيّر عندما تسعى الخطوة إلى الصفر هي بالتعريف العدد المشتق عند تلك النقطة. والمشتق معروف: $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$\lim_{x \to 0} t(x) = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

كلّما رأيت كسراً بسطه فرق قيمتين ومقامه فرق فاصلتيهما، فأنت أمام عددٍ مشتق لا أمام نهايةٍ تُحسب بالحيل. هذه القراءة تختصر مسائل كثيرة في البكالوريا.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

أمّا البرهان الثاني فيستعمل ما أثبتناه في الدرس الثالث: $\ln x < 2\sqrt{x}$ عند كلّ $x > 0$. ولمّا كان $\ln x > 0$ في حالة $x > 1$ ، صار عندنا حصرٌ من الطرفين.

برهان الكتاب للنهاية الثانية، الصفحة 148 . الفكرة أن نحصر الكسر بين مقدارين نعرف نهايتهما، ثمّ نطبّق مبرهنة الإحاطة من الوحدة الثانية.

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x}$$

1. الحصر قبل القسمة في حالة $x > 1$ يكون اللوغاريتم موجباً، ومن المتراجحة المُثبتة في الدرس الثالث يكون أصغر من $2\sqrt{x}$.

$$0 < \ln x < 2\sqrt{x}$$

2. القسمة على مقدارٍ موجب نقسم الطرفين على x ، وهو موجبٌ تماماً فلا تنقلب المتراجحة. ولاحظ أنّ $\dfrac{2\sqrt{x}}{x} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

$$0 < \frac{\ln x}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

3. نهاية الحدّ الأيمن المقدار $\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ يسعى إلى الصفر عند اللانهاية، لأنّ مقامه يكبر بلا حدّ. والحدّ الأيسر صفرٌ ثابت.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$$

4. مبرهنة الإحاطة الكسر محصورٌ بين مقدارين نهايتهما صفر، فنهايته صفر. وهذا هو المطلوب.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

متراجحةٌ أثبتّها في درسٍ سابق ليست تمريناً منتهياً، بل أداةٌ جاهزة. هنا حوّلت المتراجحة $\ln x<2\sqrt{x}$ نهايةً غير معروفة إلى حصرٍ بين معلومين.

$$g\le f\le h,\ \lim g=\lim h=\ell\ \Longrightarrow\ \lim f=\ell$$

والبرهان الثالث يستعمل تغيير المتحوّل نفسه الذي رأيناه في الدرس الثالث. نضع $u=\dfrac{1}{x}$ ، فيكون $x\ln x=-\dfrac{\ln u}{u}$ ، وعندما تسعى x إلى الصفر بقيمٍ موجبة تسعى u إلى $+\infty$. فتصير النهاية المطلوبة معاكس النهاية الثانية، أي صفراً.

$$\lim_{x\to0,\ x>0}(x\ln x)=-\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0$$

تذكّر: الخلاصة التي تحملها النهايات الثلاث جملةٌ واحدة: اللوغاريتم بطيء. عند اللانهاية يصغر أمام x ، وقرب الصفر لا يقوى نزوله على مقاومة صعود x إلى الصفر. كلّما واجهت تنافساً بين لوغاريتمٍ وكثير حدود، فكثير الحدود هو الغالب.

ما قيمة $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ ؟

أ) 1

ب) $+\infty$

ج) 0

ج. نعم، وهو ما تقوله مبرهنة الإحاطة انطلاقاً من $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

أربع نتائج تتبعها

ويضيف الكتاب أربع نهايات أخرى في إطارٍ بلا رقم. ولا تحفظها بالجهد نفسه: الأولى مقلوب النهاية الأولى، والثانية والثالثة هما النهاية الأولى نفسها بعد إزاحة، والرابعة مقلوب النهاية الثانية.

نتائج

$\lim_{x\to0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$ مقلوبُ الأولى، ونهايتها واحدٌ أيضاً لأنّ 1 مقلوب نفسه.

$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ الأولى بعد وضع x مكان $1+x$. وهي أيضاً نسبة التغيّر عند 1 مقروءةً مباشرة.

$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$ مقلوب السطر الذي فوقه.

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ مقلوب النهاية الثانية. ومقلوب مقدارٍ يسعى إلى الصفر بقيمٍ موجبة يسعى إلى $+\infty$.

الكتاب، الصفحة 148

انتبه: لا تقلب النهاية بلا تفكير. قلبُ النهاية جائزٌ عندما تكون النهاية عدداً غير معدوم، فتصير مقلوبه. أمّا إذا كانت صفراً فالمقلوب يسعى إلى اللانهاية، وعندئذٍ يجب أن تعرف إشارة المقدار قرب النقطة لتحدّد أهي $+\infty$ أم $-\infty$.

ما قيمة $\lim_{x\to1} \dfrac{\ln x}{x-1}$ ؟

أ) 0

ب) 1

ج) $+\infty$

ب. نعم. وهي نسبة التغيّر للتابع $\ln$ عند الفاصلة 1 ، فنهايتها هي $\ln'(1) = 1$.

ثلاثة أمثلة محلولة، ثلاث حيل

ولكلّ حالةٍ من حالات عدم التعيين حيلةٌ تناسبها. الأمثلة الثلاثة الآتية من الكتاب تعرض ثلاثاً منها: التجميع في كسرٍ واحد، وتغيير المتحوّل، وضمّ لوغاريتمين في واحد.

المثال الأوّل، الصفحة 148 . احسب نهاية التابع عند 0 ، والتابع معرّفٌ على $\mathbb{R}_+^*$.

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$$

1. تشخيص الحالة نعرف أنّ $\dfrac{1}{x}$ يسعى إلى $+\infty$ وأنّ $\ln x$ يسعى إلى $-\infty$ قرب الصفر بقيمٍ موجبة. فنحن أمام حالة عدم تعيينٍ من النمط الجمعيّ.

$$+\infty - \infty$$

2. التجميع في كسرٍ واحد لإزالة عدم التعيين نكتب المجموع كسراً واحداً بمقامٍ مشترك، وهو x . وهنا يظهر المقدار $x \ln x$ الذي نعرف نهايته من هذا الدرس.

$$f(x) = \frac{1 + x \ln x}{x}$$

3. قراءة البسط والمقام البسط يسعى إلى 1 لأنّ $x \ln x$ يسعى إلى الصفر. والمقام يسعى إلى الصفر بقيمٍ موجبة. فكسرٌ بسطه يقترب من واحدٍ ومقامه يتلاشى موجباً يكبر بلا حدّ.

$$\lim_{x \to 0,\ x>0} f(x) = +\infty$$

في حالة عدم التعيين الجمعيّة، اجمع الحدود في كسرٍ واحد. غالباً يظهر عندئذٍ أحد المقادير التي تحفظ نهايتها، وهنا ظهر $x \ln x$.

$$\lim_{x \to 0,\ x>0} (x \ln x) = 0$$

والمثال الثاني هو التابع $g(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ عند $+\infty$. نضع $u = \dfrac{1}{x}$ ، فيصير $g(x) = \dfrac{\ln(1+u)}{u}$. وعندما تسعى x إلى $+\infty$ تسعى u إلى الصفر، فنقع على النهاية الأولى من هذا الدرس تماماً، وقيمتها 1 .

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$$

المثال الثالث، الصفحة 149 . احسب نهاية التابع عند $+\infty$. انتبه إلى صيغة المعطى: إنّها فرق لوغاريتمين، لا لوغاريتم كسر.

$$h(x)=\ln(2x+1)-\ln(x+2)$$

1. تشخيص الحالة كلا اللوغاريتمين يسعى إلى $+\infty$ ، فالفرق حالة عدم تعيين. ولا تحاول حسابه حدّاً حدّاً.

$$+\infty-\infty$$

2. ضمّ اللوغاريتمين في واحد هنا تعمل قاعدة الدرس الثاني: فرق اللوغاريتمين هو لوغاريتم الكسر. وهذه الخطوة مشروعة لأنّ $2x+1$ و $x+2$ موجبان تماماً في حالة $x>0$.

$$h(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$$

3. نهاية ما داخل اللوغاريتم الكسر داخل اللوغاريتم كسرٌ بين كثيري حدود من الدرجة الأولى، فنهايته عند اللانهاية هي نسبة المعاملين الأعليين.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x+2}=2$$

4. الاستفادة من الاستمرار والتابع اللّوغاريتمي مستمرٌّ عند 2 ، فنهاية اللوغاريتم هي لوغاريتم النهاية. وهذا يُنهي الحساب.

$$\lim_{x\to+\infty}h(x)=\ln 2$$

الخطوة الأولى في كلّ فرق لوغاريتمين هي ضمّهما في لوغاريتمٍ واحد. من حاول حساب الحدّين منفصلين وقف أمام عدم تعيينٍ لا مخرج منه، ومن ضمّهما وجد المسألة سهلة.

$$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

تذكّر: بهذا تكتمل الوحدة. وما تحمله معك إلى وحدة التابع الأُسّي ثلاثة أشياء: أنّ اللوغاريتم بطيء، وأنّ فرق اللوغاريتمين يُضمّ قبل أيّ حساب، وأنّ مجموعة التعريف تُكتب قبل الحلّ لا بعده.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 147 إلى 149 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.