الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

مشتقّ التابع المركّب ln∘u

قاعدةٌ واحدة قصيرة، وشرطٌ واحد لا يجوز نسيانه

التابع اللّوغاريتمي . الوحدة 5 . الدرس 4

نعرف اشتقاق $\ln x$ وحده، لكنّ المسائل لا تعطيك $\ln x$ وحده أبداً. تعطيك $\ln(2x+1)$ أو $\ln(x^2+1)$ أو $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$. هذا الدرس قصير جدّاً لأنّ فيه قاعدةً واحدة، وهي نتيجةٌ مباشرة لقاعدة اشتقاق التابع المركّب التي درستها في وحدة الاشتقاق. لكن معها شرطٌ يطبعه الكتاب بلونٍ مختلف عن بقيّة السطر، وهذا وحده يكفي ليدلّك على أنّه الموضع الذي يسقط فيه الطلّاب.

القاعدة، وشرطها

مبرهنة 3

إذا كان u تابعاً اشتقاقيّاً على المجال I وموجباً تماماً على I، كان التابع $x \mapsto \ln(u(x))$ اشتقاقيّاً على I، وهذا هو تابعه المشتقّ $(\ln \circ u)'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

الكتاب، الصفحة 147

والبرهان سطران، لأنّ العمل كلّه قد أُنجز في وحدة الاشتقاق. نطبّق قاعدة اشتقاق التابع المركّب على $f = \ln \circ u$: المشتق الخارجيّ مضروباً في المشتق الداخليّ. والمشتق الخارجيّ هو $\ln'$ محسوباً عند $u(x)$، أي $\dfrac{1}{u(x)}$.

$$f'(x) = \ln'(u(x)) \times u'(x) = \frac{1}{u(x)} \times u'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

انتبه: الشرط $u > 0$ على I هو الموضع الذي يطبعه الكتاب بلونٍ مختلف، وهو الوحيد في السطر كلّه. من دونه لا وجود للتابع أصلاً، فلا معنى للسؤال عن مشتقّه. اكتب الشرط قبل الاشتقاق لا بعده، لأنّ السلّم يعطي عليه درجةً مستقلّة.

تذكّر: احفظ الصيغة بجملةٍ واحدة: مشتق الداخل على الداخل. البسط هو مشتق ما داخل اللوغاريتم، والمقام هو ما داخله من دون تغيير. ومن كتب $\frac{1}{u(x)}$ وحدها فقد نسي المشتق الداخليّ، وهذا أشيع خطأ في هذا الدرس.

التابع u اشتقاقيٌّ وموجبٌ تماماً على I . ما مشتقّ التابع $x \mapsto \ln(u(x))$ ؟

أ) $\frac{u'(x)}{u(x)}$

ب) $\frac{1}{u(x)}$

ج) $u'(x) \times \ln(u(x))$

أ. نعم: مشتق الداخل على الداخل. وتحقّق بالحالة الخاصّة $u(x) = x$ ، فتعود الصيغة إلى $\frac{1}{x}$.

وماذا لو كان الداخل سالباً تماماً؟

قد تلقى تابعاً سالباً تماماً على مجالٍ، فلا تستطيع كتابة $\ln(u(x))$. الحلّ أن تأخذ $-u$ ، وهو موجبٌ تماماً هناك، فيصير التابع $f(x) = \ln(-u(x))$ اشتقاقيّاً على المجال نفسه.

$$f'(x) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

تذكّر: والنتيجة هي المفاجأة الصغيرة في هذا الدرس: الإشارتان السالبتان تحذفان إحداهما الأخرى، فالصيغة تبقى كما هي. أي أنّك تكتب مشتق الداخل على الداخل في الحالتين، ولا تحتاج إلى صيغةٍ ثانية تحفظها.

انتبه: لكن لا تخلط بين الصيغة والشرط. الصيغة واحدة في الحالتين، أمّا الكتابة فتختلف: في الحالة الأولى تكتب $\ln(u(x))$ وفي الثانية $\ln(-u(x))$. ومن كتب $-\frac{u'(x)}{u(x)}$ في الحالة السالبة فقد أضاف إشارةً ليست هناك.

مثال محلول

من `تَدرَّبْ` الصفحة 149 ، البند الرابع. المطلوب إثبات أنّ التابع اشتقاقيٌّ على $I = \mathbb{R}$ ثمّ حساب مشتقّه. لاحظ أنّ المجال هنا هو المستقيم كلّه، وهذا ليس شائعاً مع اللوغاريتم.

$$f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$$

1. التحقّق من الشرط أوّلاً نضع $u(x) = 1 + x^2$. المربّع موجبٌ أو معدوم عند كلّ عددٍ حقيقيّ، فإضافة الواحد تجعله أكبر من الصفر تماماً، مهما كان x . إذن الشرط محقّقٌ على $\mathbb{R}$ كلّها من دون أيّ استثناء.

$$u(x) = 1 + x^2 \geq 1 > 0$$

2. اشتقاق الداخل التابع u كثير حدود، فهو اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ ، ومشتقّه معروف من وحدة الاشتقاق.

$$u'(x) = 2x$$

3. تطبيق القاعدة مشتق الداخل على الداخل. ولاحظ أنّ إشارة المشتق هي إشارة x وحدها، لأنّ المقام موجبٌ دائماً؛ فالتابع متناقصٌ قبل الصفر ومتزايدٌ بعده.

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

الترتيب الذي يعطي الدرجة كاملة: أوّلاً إثبات الإيجاب التامّ على المجال، ثمّ اشتقاق الداخل، ثمّ الكسر. الخطوة الأولى ليست مقدّمةً بل جزءٌ من الجواب.

$$\left(\forall x \in I : u(x) > 0\right) \implies \left(\ln \circ u\right)' = \frac{u'}{u}$$

ما مشتقّ التابع $f(x) = \ln(3x + 5)$ على المجال $\left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ ؟

أ) $\dfrac{1}{3x + 5}$

ب) $\dfrac{3}{3x + 5}$

ج) $\dfrac{3x + 5}{3}$

ب. نعم. والمجال المعطى هو بالضبط ما يجعل $3x + 5 > 0$ ، فالشرط محقّق.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 147 إلى 147 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.