الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

مشتقّات التوابع المألوفة

القواعد تعرفها، والجديد هو ما لا تقوله: شرطٌ كافٍ ليس لازماً، وطرفٌ يحتاج التعريف

التوابع: الاشتقاق . الوحدة 3 . الدرس 2

قواعد الاشتقاق التي في هذا الدرس رأيتها في الصفّ السابق، والكتاب يعرضها من دون برهان لأنّها تذكرة. فلماذا درسٌ كامل؟ لأ
في البكالوريا نادراً ما يكون في القاعدة نفسها، بل في حدودها. المبرهنة تقول متى يكون الجداء اشتقاقياً، ولا تقول متى لا يكون. و
تعطيك مجالاً مفتوحاً وتسكت عن طرفه. والمصحّح لا يسأل عن المشتق وحده، بل عن المجموعة التي حسبته عليها. هذا الد
هذه الثلاثة، والجدول المرجعي في آخره للنظر السريع لا للحفظ.

عمليّات على المشتقّات

ليكن u و v تابعين اشتقاقيَّين على D ، حيث D مجالٌ أو اجتماعُ مجالاتٍ، وليكن k عدداً حقيقيّاً. عندئذٍ يكون كلٌّ
ku و $u+v$ و uv اشتقاقيّاً على D .

مبرهنة 1

$(ku)' = k\,u'$ العدد الثابت يخرج من الاشتقاق كما هو.

$(u+v)' = u' + v'$ الاشتقاق يوزّع على الجمع.

$(uv)' = u'v + uv'$ ولا يوزّع على الجداء. حدّان لا حدٌّ واحد، وهذا أكثر ما يُنسى.

$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ بشرط ألّا ينعدم v في D .

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ بالشرط نفسه. انتبه إلى ترتيب الحدّين في البسط، فالطرح غير مبدّل.

الكتاب، الصفحة 70

تذكّر: وعلى الخصوص: التوابع كثيرات الحدود اشتقاقيّة على $\mathbb{R}$ ، والتوابع الكسريّة اشتقاقيّة على مجموعة تعريفها. هاتان الجملتان
تختصران أكثر أسئلة البكالوريا في هذا الباب، ولا تحتاج معهما إلى حساب.

ولكثير الحدود $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ نشتقّ كلَّ حدٍّ على حدته ثمّ نجمع الحدود

$$P'(x) = n\,a_n x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$$

ما مشتقّ الجداء uv ؟

أ) $u'v'$

ب) $u'v + uv'$

ج) $u'v - uv'$

ب. نعم، حدّان. اشتقّ الأوّل واترك الثاني، ثمّ اترك الأوّل واشتقّ الثاني، ثمّ اجمع.

شرطٌ كافٍ، وما لا تقوله المبرهنة

يسأل الكتاب سؤالاً يستحقّ الوقوف: لماذا تكون المبرهنة 1 غير مُجدية أحياناً عندما ندرس قابليّة الاشتقاق في نقطة؟

لأنّها لا تعطي سوى شروطٍ كافية. هي تنصّ على أنّه إذا كان u و v اشتقاقيَّين على D ، كان uv اشتقاقيّاً على D . لـ
تقول العكس: إذا لم يكن u أو v اشتقاقيّاً على D ، فلن يكون uv اشتقاقيّاً على D .

تذكّر: وعليه، قد يكون الجداء uv اشتقاقيّاً عند نقطةٍ دون أن يكون u أو v اشتقاقيّاً في تلك النقطة. المبرهنة تفتح باباً ولا تغلق غيره.

انتبه: هذا الفرق بين «شرطٍ كافٍ» و«شرطٍ لازم» هو أكثر ما يُخطئ فيه الطلّاب في البراهين، لا في هذه الوحدة وحدها. كلّما قرأت مبر
على صورة «إذا كان A فإنّ B »، فهي لا تقول شيئاً عن الحالة التي لا يتحقّق فيها A .

التابع u غير اشتقاقيٍّ عند 0 . ماذا نستنتج عن uv عند 0 ؟

أ) أنّه غير اشتقاقيٍّ عند 0

ب) أنّه اشتقاقيٌّ عند 0

ج) لا نستنتج شيئاً، وتلزم دراسةٌ بالتعريف

ج. نعم. المبرهنة صامتة هنا، والطريق الوحيد هو حساب نهاية الكسر $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$.

عند الطرف، عُد إلى التعريف

الحالة الثانية التي تسكت فيها المبرهنة هي طرف المجال. تعطيك المبرهنة الاشتقاق على مجالٍ مفتوح، فتظنّ أنّ الطرف خار
ليس حتماً: هي لا تنفي شيئاً عنه.

هذا مثال الكتاب على الصفحة 72 ، وهو النموذج الذي يتكرّر في البكالوريا كلّما ظهر جذرٌ عند طرف مجال. لنتأمّل التابع f
المعرّف على $[0,+\infty[$.

$$f(x)=x\sqrt{x}$$

1. ما تعطيه المبرهنة التابع f هو جداء ضرب التابعين $x\mapsto x$ الاشتقاقي على $\mathbb{R}$ و $x\mapsto\sqrt{x}$ الاشتقاقي على $]0,+\infty[$. إذن f اشتقاقي على $]0,+\infty[$.

$$f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}}{2}$$

2. ما لا تعطيه تؤكّد المبرهنة وجود f' على $]0,+\infty[$ ، لكنّها لا تنفي قابليّة الاشتقاق عند الصفر. الصفر طرفُ المجال، والمبر
لم تتكلّم عنه أصلاً.

3. العودة إلى التعريف لدراسة الاشتقاق عند الصفر نعود إلى تعريف العدد المشتق ونبسّط الكسر. لاحظ أنّ $f(0) = 0$.

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$$

4. النتيجة نهاية $\sqrt{h}$ عندما تسعى h إلى الصفر هي الصفر، فالتابع f اشتقاقيٌّ عند الصفر ومشتقّه هناك يساوي الصفر. الط
داخلٌ إذن، خلافاً لما توحي به المبرهنة وحدها.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 0$$

كلّما انتهى مجالُ اشتقاقٍ عند طرفٍ ينتمي إلى مجموعة التعريف، فالمبرهنة لا تحسم، والحسم بحساب نهاية الكسر عند ذلك الطرف

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

جدول المشتقّات المرجعيّة

بعد ما سبق يصير الجدول أداةَ نظرٍ سريع لا مادّةَ حفظ. انتبه إلى العمود الأخير في الكتاب: هو ليس زينة، بل يحمل المجموعة ال
عليها كلّ سطر.

مشتقّات توابع مرجعيّة

$(mx + p)' = m$ على $\mathbb{R}$. ميل المستقيم ثابت.

$(x^n)' = n\,x^{n-1}$ على $\mathbb{R}$ ، حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ و $x \neq 0$. لاحظ الإشارة السالبة.

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ على $]0, +\infty[$ وحدها. المجال مفتوح عند الصفر، وهذا هو السطر الذي يخفي المسألة.

$(\sin x)' = \cos x$ على $\mathbb{R}$.

$(\cos x)' = -\sin x$ على $\mathbb{R}$. الإشارة السالبة هنا لا في الجيب.

الكتاب، الصفحة 70

انتبه: السطر الرابع هو الفخّ. مجال اشتقاق $\sqrt{x}$ هو $]0, +\infty[$ بينما مجال تعريفه $[0, +\infty[$ ، والفرق نقطةٌ واحدة. عند
تنقلب الحال بحسب التابع الذي يضربه الجذر: الجذر وحده غير اشتقاقيٍّ عند الصفر، و $x\sqrt{x}$ اشتقاقيٌّ عنده كما رأينا.

المجموعة جزءٌ من الجواب

تُصاغ مسألة الكتاب على الصفحة 71 بثلاثة مطالب مرتّبة: عيّن مجموعة تعريف التابع، ثمّ المجموعة التي يقبل عليها الاشتق
احسب تابعه المشتقّ. الترتيب مقصود، ومن قفز إلى الحساب فقد بندين قبل أن يبدأ.

خذ $h(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x^2+x}$. المقام ينعدم عند 0 وعند -1 ، فالتابع كسريٌّ معرّف على $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ ، ومن اشتقاقيٌّ على المجموعة نفسها، لأنّ التوابع الكسريّة اشتقاقيّة على مجموعة تعريفها. وبالصيغة $\dfrac{u}{v}$ نحصل على المشتق.

$$x)=\frac{(2x+1)(x^2+x)-(x^2+x+2)(2x+1)}{(x^2+x)^2}=-\frac{2(2x+}{(x^2+x}$$

وخذ $g(x)=\dfrac{1}{x^2+x+1}$. هنا لا ينعدم المقام أبداً: مميّز x^2+x+1 سالب، فالتابع معرّف واشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ ومن الصيغة $\dfrac{1}{v}$ يكون $g'(x)=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$.

تذكّر: لاحظ الفرق بين المثالين: كلاهما كسريّ، وكلاهما يُحلّ بالقاعدة نفسها، والذي اختلف هو المجموعة. دراسة المقام تسبق الاشتقاق دائماً.

ما مجموعة اشتقاق التابع $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4}$ ؟

أ) $\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$
ب) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$
ج) $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

أ. نعم. المقام ينعدم عند -2 و 2 ، وهذه مجموعة التعريف، والتابع الكسري اشتقاقيٌّ على مجموعة تعريفه.

تذكّر: في سلالم التصحيح التي قرأناها، تُمنح درجةٌ مستقلّة لتعيين المجموعة قبل أيّ حساب. اكتبها في سطرٍ وحدها، ولو بدت بديهيّة أرخص درجةٍ في المسألة.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 70 إلى 72 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.