الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

المشتقات من مراتب عليا

اشتقاقٌ يُعاد على نفسه، ورمزٌ يجب ألّا يُخلط بالقوّة

التوابع: الاشتقاق . الوحدة 3 . الدرس 5

المشتق تابعٌ مثل غيره، فما الذي يمنع من اشتقاقه هو أيضاً؟ لا شيء. وهذا كلّ ما في هذا الدرس: نعيد العمليّة على ناتجها، مرّةً وثانية وعاشرة. الدرس أقصر دروس الوحدة، صفحةٌ واحدة في الكتاب، لكنّه ليس زائداً: التابع المشتق الثاني هو ما تحتاجه في وحدة التكامل، وفي المعادلات التفاضليّة في الجزء الثاني. والجديد فيه ليس فكرةً بل رمزاً، ورمزٌ واحد هنا يُفقد الدرجة إن أُسيء قراءته.

الاشتقاق يُعاد على نفسه

ليكن f تابعاً اشتقاقيّاً على مجالٍ I . نسمّي تابعَه المشتقّ f' التابعَ المشتقّ الأوّل، أو المشتقّ من المرتبة الأولى. وعندما يكون f' نفسه اشتقاقيّاً على I ، نسمّي مشتقّه المشتقَّ الثاني، أو المشتقّ من المرتبة الثانية.

تعريف 4

$f^{(1)} = f'$ المشتق من المرتبة الأولى، وهو ما نعرفه من الدروس السابقة.

$f^{(2)} = f'' = (f')'$ المشتق من المرتبة الثانية، بشرط أن يكون f' اشتقاقيّاً على I .

$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$ أيّاً كان العدد الطبيعي $2 \leq n$. تعريفٌ تدريجيّ: كلّ مرتبة تُعرَّف بالتي قبلها.

الكتاب، الصفحة 83

تذكّر: لاحظ أنّ كلّ مرتبة تشترط ما قبلها: لا وجود لمشتقٍّ ثالث ما لم يكن الثاني موجوداً واشتقاقيّاً. وليس كلّ تابعٍ اشتقاقيّاً مرّتين؛ التابع $x \mapsto x\,|x|$ مثلاً اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ ومشتقّه $2\,|x|$ ، وهو غير اشتقاقيٍّ عند الصفر.

ما f'' للتابع $f(x) = x^4$ ؟

أ) $4x^3$

ب) x^8

ج) $12x^2$

ج. نعم: $f'(x) = 4x^3$ ثمّ $f''(x) = 12x^2$.

الرمز، وأين يُخلط

يقدّم الكتاب صيغتين للرمز نفسه: الشرطات f' و f'' ، والرقم بين قوسين $f^{(1)}$ و $f^{(2)}$. الأولى أوضح في المراتب الصغيرة، والثانية هي الوحيدة الصالحة عندما تكبر المرتبة، إذ لا أحد يكتب عشر شرطات.

انتبه: والقوسان حول الرقم ليسا زينة، بل هما ما يفرّق بين شيئين مختلفين تماماً. $f^{(2)}$ هو المشتق الثاني، و f^2 هو مربّع التابع. اكتب القوسين دائماً، فإسقاطهما يحوّل جوابك إلى شيء آخر ولا يُقرأ على أنّه سهو.

تذكّر: وبالمثل f'' ليس $(f')^2$. الشرطة الثانية تعني اشتقاقاً ثانياً، لا ضرباً في نفسه.

ماذا يعني الرمز $f^{(3)}$ ؟

أ) المشتق من المرتبة الثالثة

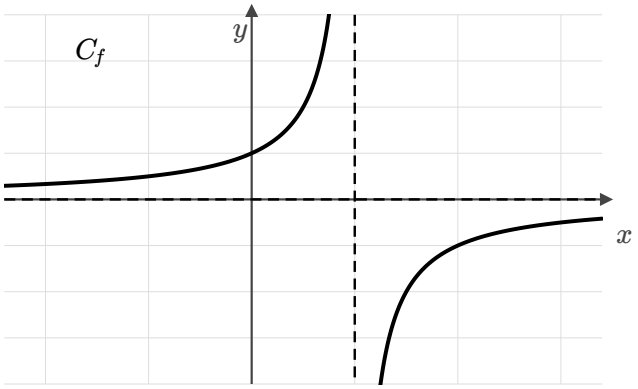
ب) مكعّب التابع f

ج) قيمة التابع عند 3

أ. نعم، أي $(f'')'$. القوسان يدلّان على المرتبة.

مثال محلول: صيغةٌ لكلّ مرتبة

المطلوب في المسائل نادراً ما يكون مشتقّاً ثانياً بعينه، بل صيغةً عامّة تصلح لكلّ مرتبة. وهنا يلتقي هذا الدرس بأداةٍ تعرفها من الوحدة الأولى: الإثبات بالتدريج.



التابع $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. مجموعة تعريفه اجتماع مجالين، والمشتقات من كلّ المراتب معرّفة على المجموعة نفسها.

هذا مثال الكتاب على الصفحة 83 . المطلوب إثبات أنّ المشتق من المرتبة n يُعطى بالصيغة $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$ في حالة $x \neq 1$. ليكن f التابع المعرّف على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

1. الخاصّة التي نُثبتها نسمّي $E(n)$ العبارةَ الآتية، ونثبتها بالتدريج على n .

$$E(n): \quad f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

2. الأساس نحسب f' بقاعدة المقلوب. انتبه إلى أنّ مشتق المقام $1-x$ هو -1 ، فالإشارتان السالبتان تُلغيان بعضهما.

$$f'(x) = \frac{0 \times (1-x) - 1 \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1!}{(1-x)^{1+1}}$$

3. الفرض نفترض صحّة $E(n)$ عند مرتبةٍ ما، ثمّ نشتقّ الطرفين مرّةً أخرى. المقام قوّةٌ لتابع، فنستعمل النتيجة 7 من الدرس السابق.

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \right)'$$

4. الاشتقاق مشتق $(1-x)^{n+1}$ هو $-(n+1)(1-x)^{n}$ ، والإشارة السالبة تُلغي السالبة في قاعدة القسمة.

$$= \frac{0 - n! \times \left(-(n+1)\right)(1-x)^{n}}{(1-x)^{2n+2}} = \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

5. الخلاصة وهذا هو نصّ $E(n+1)$ بالضبط، لأنّ $(n+1)+1 = n+2$. فالخاصّة صحيحة عند الأساس وتنتقل من مرتبةٍ إلى التي تليها، إذن هي صحيحة أيّاً كانت n .

في كلّ مسألةٍ من هذا النوع يظهر العاملي $n!$ لأنّ كلّ اشتقاقٍ ينزّل الأسّ ويضربه في ما سبق. تعرّف على هذا النمط، فهو يوفّر عليك نصف الحساب.

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

للتابع $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ وجدنا $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$. ما $f^{(3)}(0)$ ؟

أ) 1

ب) 6

ج) 24

ب. نعم: $\dfrac{3!}{(1-0)^4} = \dfrac{6}{1} = 6$.

لماذا هذا الدرس أصلاً

الدرس صفحةٌ واحدة ولا «تَدرَّبْ» له، فمن السهل أن يُقرأ ويُنسى. لكنّه يعود في ثلاثة مواضع لاحقة، وفي كلٍّ منها يكون شرطاً لا زينة.

تذكّر: في وحدة التكامل يظهر السؤال معكوساً: بدل أن تشتقّ، تبحث عن تابعٍ مشتقّه معطى. ومن لم يعتد على أنّ الاشتقاق يُعاد على نفسه، لا يقرأ ذلك السؤال بسهولة.

تذكّر: وفي المعادلات التفاضليّة في الجزء الثاني تظهر المشتقات الثانية في المعادلة نفسها، لا في الحلّ. هناك يصير f'' مجهولاً تعمل عليه، لا نتيجةً تحسبها.

انتبه: وأخيراً في دراسة التوابع: إشارة المشتق الأوّل تعطي الاطراد كما رأينا في الدرس الثالث، وإشارة المشتق الثاني تعطي تقعّر الخطّ البياني. الكتاب لا يتناول التقعّر في هذه الوحدة، فلا تفترضه في جوابك، لكن اعرف أنّ الأداة موجودة ومن هنا تأتي.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 83 إلى 83 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.