الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

اشتقاق تابع مركّب

قاعدة واحدة تفتح كلّ التوابع المركّبة، وحدٌّ لا تتكلّم عنه

التوابع: الاشتقاق . الوحدة 3 . الدرس 4

حتى الآن اشتققنا مجموعاً وجداءً وكسراً. لكنّ التوابع التي تأتي في المسألة الكبرى ليست كذلك: فيها جذرٌ فوق ثلاثيّ حدود، وقوّةٌ لقوس، وجيبٌ لمقدارٍ كامل. كلّها من الشكل نفسه: تابعٌ يجلس داخل تابع. والقاعدة التي تفتحها جميعاً واحدة، وهي أنّ مشتقّ التركيب هو جداء مشتقّين: مشتق الخارجيّ مقيّماً عند الداخليّ، مضروباً بمشتق الداخليّ. ومنها تُشتقّ نتيجتان تختصران أكثر ما يُطلب: واحدة للجذر وواحدة للقوّة. ثمّ يبقى حدٌّ واحد لا تتكلّم عنه القاعدة، وهو الطرف الذي ينعدم عنده ما تحت الجذر، وهناك نعود إلى التعريف كما فعلنا في الدرس الثاني.

قاعدة السلسلة

تسمحُ المبرهنةُ الآتية بحساب مشتق تابعٍ من الشكل $x \mapsto g\left(u(x)\right)$ انطلاقاً من معرفة مشتق كلٍّ من g و u .

مبرهنة 5

$u : I \longrightarrow J$ الشرط الذي يُنسى: أيّاً كانت x من I ، يجب أن تنتمي $u(x)$ إلى J ، وإلّا فلا معنى للتركيب.

$(g \circ u)'(x) = g'\left(u(x)\right) \times u'(x)$ بشرط أن يكون g اشتقاقيّاً على J و u اشتقاقيّاً على I . عندئذٍ يكون التركيب اشتقاقيّاً على I .

الكتاب، الصفحة 78

تذكّر: اقرأ الصيغة من الخارج إلى الداخل: اشتقّ الخارجيّ واترك الداخليّ كما هو في مكانه، ثمّ اضرب بمشتق الداخليّ. الترتيب هذا، ولا يُعكس.

وهذه الخاصّة موضعيّة، أي أنّها تُقال عند كلّ نقطة على حدة، فهي تبقى صحيحة حتى لو كان I أو J اجتماعَ مجالات. أمّا برهانها فيتركه الكتاب لقراءةٍ ثانية، وفكرته أن نمدّ كسرَي النهاية بتابعين مساعدين متّصلين عند النقطة، فيصير حاصل ضربهما هو كسر النهاية للتركيب.

وأبسط تطبيقاتها الحالة الخطّيّة: إذا كان $f(x) = g(ax + b)$ ، فالداخليّ هو $u(x) = ax + b$ ومشتقّه العدد a ، فيكون $f'(x) = a\, g'(ax + b)$.

وهذا مثال الكتاب على الصفحة 79 . لاحظ أنّ الخطوة الأولى ليست حساباً بل تسميةً: من هو الخارجيّ ومن هو الداخليّ. من أخطأ هنا أخطأ في كلّ ما بعده.

$$f(x) = \left(3x^2 - x\right)^4$$

1. التسمية الخارجيّ يرفع إلى القوّة الرابعة، والداخليّ هو ثلاثيّ الحدود. كلاهما اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$.

$$g(x) = x^4 \quad , \quad u(x) = 3x^2 - x$$

2. المشتقّان مشتق الخارجيّ بقاعدة القوّة، ومشتق الداخليّ بقاعدة كثير الحدود.

$$g'(x) = 4x^3 \quad , \quad u'(x) = 6x - 1$$

3. التركيب نضع $u(x)$ في مكان x داخل g' ، ثمّ نضرب بـ $u'(x)$.

$$f'(x) = 4\left(3x^2 - x\right)^3 \times (6x - 1) = 4\,(6x - 1)\left(3x^2 - x\right)^3$$

الخطأ الأكثر شيوعاً هو نسيان الضرب بمشتق الداخليّ. اجعلها عادة: بعد كلّ اشتقاقٍ لتركيب، اسأل نفسك أين ذهب u' .

$$(g \circ u)' = g'(u) \times u'$$

ما مشتقّ التابع $f(x) = \cos\left(x^2\right)$ ؟

أ) $-\sin\left(x^2\right)$

ب) $-2x\sin\left(x^2\right)$

ج) $-\sin(2x)$

ب. نعم. مشتق الخارجيّ $-\sin$ مقيّماً عند x^2 ، مضروباً بمشتق الداخليّ $2x$.

نتيجة 6: الجذر

أوّل ما تُطبّق عليه القاعدة هو الجذر، لأنّه أكثر ما يظهر في المسألة. إذا كان u تابعاً موجباً تماماً واشتقاقيّاً على مجالٍ I ، كان التابع f المعرّف على I بالصيغة $f(x) = \sqrt{u(x)}$ اشتقاقيّاً على I .

نتيجة 6

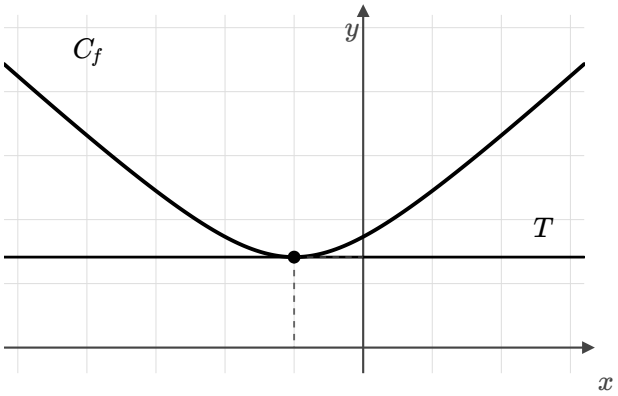
$f(x) = \sqrt{u(x)}$ بشرط $u > 0$ على I و u اشتقاقيٌّ على I .

$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ أيّاً كانت x من I . وهي حالةٌ خاصّة من المبرهنة 5 مع $g(x) = \sqrt{x}$ و $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

الكتاب، الصفحة 79

خذ $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$. ندرس أوّلاً إشارة ما تحت الجذر: مميّز ثلاثيّ الحدود $x^2 + 2x + 3$ يساوي -8 ، وهو سالب، فالمقدار موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ كلّها. إذن التابع معرّفٌ واشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ ، ونطبّق الصيغة.

$$f'(x) = \frac{2x + 2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$$



الخطّ البياني للتابع $\sqrt{x^2 + 2x + 3}$. عند $x = -1$ ينعدم البسط $x + 1$ ، فالمماس أفقيّ وهناك قيمةٌ صغرى تساوي $\sqrt{2}$. لا حدود للمجال هنا، لأنّ ما تحت الجذر لا ينعدم أبداً.

انتبه: كثيرٌ من الحلول تختصر الأمر إلى قاعدةٍ: التابع معرّفٌ عندما $0 \leq u(x)$ واشتقاقيٌّ عندما $0 < u(x)$. الشطر الأوّل صحيح، والثاني شرطٌ كافٍ فقط. سيأتي بعد قليل مثالٌ من الكتاب نفسه ينقض استعماله كتكافؤ.

ما مشتقّ $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$

ب) $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

ج) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

ج. نعم. $\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ ويُختصر العدد 2 .

نتيجة 7: القوّة

والحالة الثانية هي القوّة. ليكن n عدداً صحيحاً لا يساوي الصفر، وليكن u تابعاً اشتقاقيّاً على مجالٍ I .

نتيجة 7

$f(x)=(u(x))^n$ حيث $n\in\mathbb{Z}^*$. وفي حالة $n<0$ يُشترط ألّا ينعدم u على I .

$f'(x)=n\,(u(x))^{n-1}\times u'(x)$ الصيغة نفسها للأسّ الموجب والسالب، والفرق كلّه في ذلك الشرط الإضافي.

الكتاب، الصفحة 80

تذكّر: ولا تنسَ أنّ الكسر $\dfrac{1}{(u(x))^k}$ هو $(u(x))^{-k}$ ، فتنطبق عليه النتيجة نفسها بأسٍّ سالب. هذا يوفّر عليك قاعدة القسمة كاملةً في أكثر الحالات.

مثال من الكتاب: $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+x+1)^3}$. نكتبه $(u(x))^{-3}$ مع $u(x)=x^2+x+1$ ، وهو موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ، فلا ينعدم.

$$f'(x)=-3\left(x^2+x+1\right)^{-4}\times(2x+1)=\frac{-3\,(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$$

الطرف الذي لا تتكلّم عنه القاعدة

نتيجة 6 تشترط $u > 0$. فماذا عن نقطةٍ x_0 ينعدم عندها u ؟ هل يمكن للتابع $\sqrt{u(x)}$ أن يقبل الاشتقاق هناك؟

تذكّر: الجواب: نعم، ممكن. النتيجة 6 لا تنصّ على أنّ $u(x_0) = 0$ يقتضي أنّ f غير اشتقاقيٍّ عند x_0 ؛ هي ببساطة لا تجيب عن السؤال. وللإجابة نعود إلى تعريف العدد المشتق.

والكتاب يضع مثالين متجاورين، الشرط فيهما واحد والجواب مختلف. الأوّل $f(x) = \sqrt{x-1}$ على $[1, +\infty[$ ، وهنا $u(1) = 0$. نحسب كسر النهاية عند 1 في حالة $1 < x$.

$$t(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \longrightarrow \quad +\infty$$

فالتابع غير اشتقاقيٍّ عند 1 ، ومماسه هناك شاقوليّ. والثاني $f(x) = \sqrt{(x-1)^4}$ على $\mathbb{R}$ ، وهنا أيضاً $u(1) = 0$. لكنّ الجذر والقوّة الرابعة يختصران.

$$f(x) = (x-1)^2$$

انتبه: فهو كثير حدود، اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ كلّها، ومن ثَمّ اشتقاقيٌّ عند 1 . الشرط $u(x_0) = 0$ نفسه في المثالين، والجواب مختلف. لهذا لا يصحّ أن تُقرأ النتيجة 6 على أنّها تكافؤ: هي تعطي متى نعرف، ولا تعطي متى لا يكون.

والحالة نفسها تتكرّر مع تابعٍ مركّب آخر: $f(x) = \cos\sqrt{x}$ على $[0, +\infty[$. المبرهنة 5 تعطي الاشتقاق على $]0, +\infty[$ وحدها، لأنّ $\sqrt{x}$ ليس اشتقاقيّاً عند الصفر. وبالعودة إلى التعريف يتبيّن أنّ التابع اشتقاقيٌّ عند الصفر أيضاً وأنّ $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

التابع $f(x)=\sqrt{u(x)}$ و $u(x_0)=0$. ماذا نستنتج عن الاشتقاق عند x_0 ؟

أ) لا نستنتج شيئاً، ويلزم حساب نهاية كسر التعريف

ب) أنّه غير اشتقاقيٍّ عند x_0

ج) أنّ مماسه شاقوليّ هناك

أ. نعم. المثالان $\sqrt{x-1}$ و $\sqrt{(x-1)^4}$ يحقّقان الشرط نفسه ويختلف جوابهما.

مثال محلول: ربع الدائرة

هذا السؤال 2 من «تَدرَّبْ» على الصفحة 82 . في معلمٍ متجانس، المعادلة $x^2+y^2=1$ هي معادلةُ الدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1 . وربعُ الدائرة في الربع الأوّل هو الخطّ البياني للتابع f المعرّف على $[0,1]$. المطلوب: احسب المشتق، ثمّ استنتج معادلة المماس عند النقطة A التي فاصلتها $\dfrac{1}{2}$ ، ثمّ تحقّق أنّ (OA) والمماس متعامدان.

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

1. المشتق ما تحت الجذر هو $u(x)=1-x^2$ ، وهو موجبٌ تماماً على $]-1,1[$ ، ومشتقّه $-2x$. نطبّق النتيجة 6 على المجال $]0,1[$.

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. القيمة والميل عند $\frac{1}{2}$ نعوّض. لاحظ أنّ $1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ وجذرها $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad,\quad f'\left(\tfrac{1}{2}\right)=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

3. معادلة المماس بالصيغة المعتادة من الدرس الأوّل، انطلاقاً من الارتفاع عند الفاصلة $\dfrac{1}{2}$ وبميلٍ مقداره $f'\left(\frac{1}{2}\right)$.

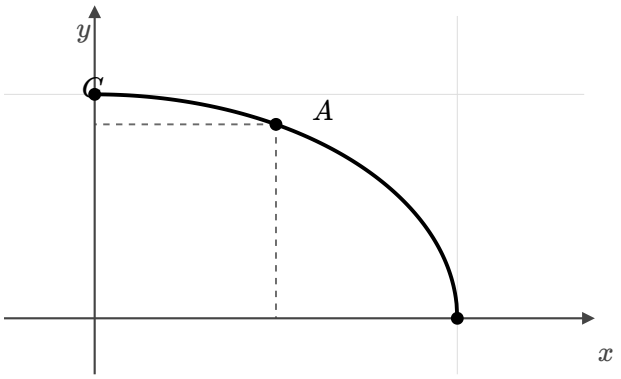
$$T:\ y=\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(x-\tfrac{1}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

4. التعامد ميل (OA) هو ارتفاع A مقسوماً على فاصلتها، لأنّ المستقيم يمرّ بالمبدأ. ثمّ نضرب الميلين: مستقيمان متعامدان إذا وفقط إذا كان جداء ميلَيهما -1 .

$$m_{(OA)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3} \quad , \quad \sqrt{3} \times \frac{-1}{\sqrt{3}} = -1$$

المماس لدائرة عند نقطةٍ منها يعامد نصف القطر المارّ بتلك النقطة. حسبناها هنا بالاشتقاق، وهي صفةٌ هندسيّة تعرفها من قبل، والاتّفاق بين الطريقين هو التحقّق.

$$m_1 \times m_2 = -1$$



ربعُ الدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في الربع الأوّل، وهو الخطّ البياني للتابع $\sqrt{1-x^2}$ على $[0,1]$ ، والنقطة A التي فاصلتها $\frac{1}{2}$.

تذكّر: لاحظ أنّ المشتق غير معرّف عند 1 ، لأنّ ما تحت الجذر ينعدم هناك. المماس عند طرف ربع الدائرة شاقوليّ، وهو ما تراه في الشكل: الخطّ ينزل عموديّاً إلى محور الفواصل.

المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 78 إلى 82 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.