الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

خواص طويلة عدد عقدي وزاويته

الضرب يجمع الزوايا، والقسمة تطرحها، والجمع لا يفعل شيئاً من هذا

الأعداد العقديّة . الوحدة 4 . الدرس 4

في الدرس السابق تعلّمنا كتابة العدد بطويلته وزاويته. الآن يأتي الربح: احسب $(1-i\sqrt{3})^5$ بالشكل الجبري، وسترى المتعب ينتظرك. أمّا بالشكل المثلّثي فالجواب يخرج في سطرين، لأنّ الضرب هناك لا يفكّ الأقواس، بل يضرب الطويلات و هذا الدرس يبني هذه القاعدة، ثمّ يبني أختها في القسمة، ثمّ يحذّرك من العملية الوحيدة التي لا تطيعها: الجمع.

الضرب يجمع الزوايا

لنأخذ عددين غير معدومين، ونكتب كلّاً منهما بشكله المثلّثي: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ و $z'=r'(\cos\theta'+i\sin\theta')$، حيث $r=|z|$ و $\theta=\arg z$، وكذلك $r'=|z'|$ و $\theta'=\arg z'$

نضربهما كما نضرب أيّ قوسين، ثمّ نضع $i^2=-1$ ونرتّب الحدود: الحقيقية معاً والتخيلية معاً.

$$\begin{aligned} &= r(\cos\theta+i\sin\theta)\times r'(\cos\theta'+i\sin\theta') \\ &= rr'\left((\cos\theta\cos\theta'-\sin\theta\sin\theta')+i(\cos\theta\sin\theta'+\sin\theta\cos\right. \end{aligned}$$

انظر إلى القوسين الداخليين. الأوّل هو تماماً $\cos(\theta+\theta')$، والثاني هو $\sin(\theta+\theta')$، وهما دستورا الجمع اللذان المثلّثات. هنا يظهر سبب هذا الدرس كلّه: الضرب في $\mathbb{C}$ يستدعي دستوري الجمع، فتتحوّل الزوايا من ضرب إلى جمع.

$$z\times z'=rr'\left(\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')\right)$$

بقيت خطوة صغيرة لا تتخطّاها: هل هذه الكتابة شكل مثلّثي؟ نعم، لأنّ $r>0$ و $r'>0$، فجداؤهما rr' موج ولهذا يحقّ لنا أن نقرأ منه الطويلة والزاوية مباشرة.

مبرهنة 4

$|zz'|=|z|\times|z'|$ طويلة الجداء هي جداء الطويلتين.

$\arg(zz')=\arg z+\arg z'\ (2\pi)$ زاوية الجداء هي مجموع الزاويتين، بمقياس 2π . الشرط: z و z' غير م

الكتاب، الصفحة 98

مثال الكتاب: ليكن $z=2\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)$ و $z'=3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$. لا نفكّ شي في 3، ونجمع $\frac{\pi}{5}$ مع $-\frac{\pi}{4}$.

$$|zz'| = 2 \times 3 = 6$$
$$\arg(zz') = \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{20}$$
$$zz' = 6\left(\cos\left(-\frac{\pi}{20}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{20}\right)\right)$$

تذكّر: الطويلات تُضرب، والزوايا تُجمع. لا تخلط بين العمليتين: من يجمع 2 و 3 ليحصل على 5 يكون قد طبّق قاعدة الز
على الطويلات.

إذا كانت $|z| = 5$ و $|z'| = 2$ ، فما طويلة الجداء zz' ؟

أ) 10

ب) 7

ج) $\frac{5}{2}$

أ. صحيح. طويلة الجداء جداء الطويلتين، أي 2×5 .

القوى ودستور دوموافر

ماذا لو ضربنا العدد بنفسه؟ نطبّق المبرهنة السابقة على $z \times z$: الطويلة تصير $|z|^2$ والزاوية تصير $2\arg z$. ثمّ
مرّة ثالثة فنحصل على $|z|^3$ و $3\arg z$ ، وهكذا. الكتاب يثبّت هذا بالتدريج على العدد الطبيعي n .

$$|z^n| = |z|^n$$
$$\arg(z^n) = n\arg z\ (2\pi)$$

وإذا كتبنا العدد بشكله المثلّثي $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ، صارت النتيجة نفسها بصيغة أوضح للاستعمال:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

وللحالة الخاصّة التي تكون فيها الطويلة تساوي 1 ، أي $r = 1$ ، يبقى الجزء الزاوي وحده. هذه الصيغة تحمل اسماً ح
الكتاب: دستور دوموافر.

نتيجة 5 ودستور دوموافر

$|z^n| = |z|^n$ الطويلة تُرفع إلى الأس نفسه، والأس n عدد طبيعي.

$\arg(z^n) = n\arg z\ (2\pi)$ الزاوية تُضرب بالأس، لا تُرفع إليه. الشرط: z غير معدوم.

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ دستور دوموافر، أي الحالة $r = 1$.

الكتاب، الصفحة 98

انتبه: الأس يذهب إلى الطويلة، وإلى الزاوية يذهب الضرب. من يكتب $\arg(z^3) = (\arg z)^3$ يكون قد بدّل العمليتين. و
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n$ لا تساوي $\cos^n\theta + i\sin^n\theta$: الأس على القوس كلّه، لا على كل حدّ وحده.

إذا كانت $\arg z = \frac{\pi}{6}$ ، فما زاوية z^4 ؟

أ) $\frac{\pi}{24}$

ب) $\frac{2\pi}{3}$

ج) $\frac{\pi}{6}$

ب. صحيح. $4 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$.

القسمة تطرح الزوايا

لا يعيد الكتاب الحساب من جديد للقسمة، بل يستعمل حيلة تستحقّ الانتباه: نسمّي الخارج $w = \frac{z}{z'}$ ، فيكون $z = wz'$
عندنا جداء، والجداء نعرف قاعدته.

نطبّق مبرهنة 4 على $z = wz'$ ، فنحصل على $|z| = |w| \times |z'|$ وعلى $\arg z = \arg w + \arg z' \ (2\pi)$
نعزل $|w|$ و $\arg w$ ، أي أن نقسم في الأولى ونطرح في الثانية.

مبرهنة 6

$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ طويلة الخارج هي خارج الطويلتين، والمقام z' غير معدوم.

$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \ (2\pi)$ زاوية الخارج هي فرق الزاويتين، بمقياس 2π . الشرط: z و z' غير معدو

$\arg\left(\frac{1}{w}\right) = -\arg w \ (2\pi)$ $\quad$ الحالة الخاصّة $\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|}$ ، بشرط $w \neq 0$.

الكتاب، الصفحة 99

مثال الكتاب: ليكن $z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ و $z' = \frac{3}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$. انتبه إلى
الطرح: زاوية المقام سالبة، وطرح السالب جمع.

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{4}{3/2} = \frac{8}{3}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

$$\frac{z}{z'} = \frac{8}{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

تذكّر: المقلوب $\frac{1}{w}$ يقلب الطويلة ويعكس الزاوية. لاحظ أنّ زاويته هي زاوية المرافق نفسها، ولذلك يلتقي هذا الدرس بما رأين

أيّ العبارات الآتية صحيحة دائماً لعددين عقديين غير معدومين؟

أ) $|z+z'|=|z|+|z'|$

ب) $|zz'|=|z|+|z'|$

ج) $|zz'|=|z|\times|z'|$

ج. صحيح. هذه مبرهنة 4، وهي تصلح لأيّ عددين عقديين.

لماذا لا تُجمع الطويلات

حتّى الآن تسير الأمور على ما يُرام: الطويلة تنسجم مع الضرب ومع القسمة. لكنّ الكتاب يقف هنا وقفة تحت عنوان تكريس
ليقول ما لا تفعله الطويلة.

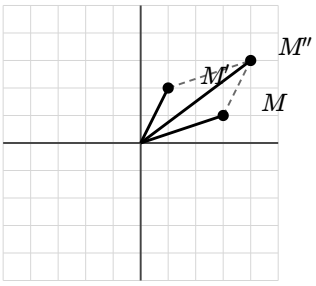
انتبه: طويلة مجموع عددين لا تساوي مجموع الطويلتين. هذه ليست حالة نادرة أو استثناء صغير، بل هي الحال العامّة، والمس
هي الاستثناء.

الدليل مثال واحد يكفي، وهو مثال الكتاب: خذ z غير معدوم واختر $z'=-z$. المجموع ينعدم، بينما مجموع الطو
موجب تماماً.

$$|z+z'|=|z-z|=0$$
$$|z|+|z'|=2|z|>0$$

إذاً ما الذي يبقى صحيحاً؟ يبقى اتّجاه واحد فقط، وله اسم: متراجحة المثلّث. الطويلة قد تكون أصغر، وقد تساوي، لكنّها

$$|z+z'|\leq|z|+|z'|$$



M صورة z ، و M' صورة z' ، و M'' صورة $z+z'$. الطريق المستقيم OM'' لا يزيد على الطريق المكسور عبر M

الشكل يقرأ المتراجحة بلغة الهندسة: $OM''\leq OM+OM'$ ، أي أنّ ضلعاً في مثلّث لا يزيد على مجموع الضلعي
من هنا جاء الاسم.

تذكّر: المساواة $|z+z'|=|z|+|z'|$ لا تصير صحيحة إلّا حين يكون للعددين الاتّجاه نفسه، أو حين ينعدم أحدهما، أ
يوجد مثلّث أصلاً بل قطعة واحدة.

انتبه: وفي فقرة أخطاء يجب تجنّبها في آخر الوحدة يقول الكتاب: لا تُستعمل المتراجحات بين أعداد عقدية. العبارة $z<z'$ لا
$\mathbb{C}$. ما يُقارن هو الطويلات وحدها، لأنّها أعداد حقيقية موجبة، فتكتب $|z|<|z'|$.

مثال محلول: قوّة وكسر

هذا هو المثال الذي يختم به الكتاب الدرس، وهو تمرين امتحاني نموذجي: المطلوب الشكل الجبري لكلّ من العددين. ج
فكّ $(1-i\sqrt{3})^5$ بالتوزيع، ثمّ تابع الحلّ.

أعطِ الشكل الجبري لكلّ من العددين. القاعدة العامّة: كلّ ما فيه قوّة، حوّله إلى الشكل المثلّثي أوّلاً.

$$z=(1-i\sqrt{3})^5 \qquad w=\frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3}+i)^3}$$

1. نكتب الأساس بشكله المثلّثي نضع $z'=1-i\sqrt{3}$. طويلته $\sqrt{1+3}=2$ ، والشرطان $\cos\theta=\frac{1}{2}$ و
$\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ يعطيان $-\frac{\pi}{3}$.

$$z'=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

2. نرفع إلى القوّة الخامسة الطويلة تُرفع إلى 5 ، والزاوية تُضرب بـ 5 . لا فكّ أقواس ولا ضرب كلّ حدّ بكلّ حدّ.

$$z=z'^{5}=2^5\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right)$$

3. نختصر الزاوية ثمّ نقرأ الجزأين الزاوية $-\frac{5\pi}{3}$ نضيف إليها دورة كاملة 2π فتصير $\frac{\pi}{3}$ ، وهي الزاوية نفسها. عندها
$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ و $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$z=32\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=16+16\sqrt{3}\,i$$

4. نعالج البسط نبدأ بالكسر. طويلة $1+i$ هي $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{\pi}{4}$ ، فالقوّة الرابعة تضرب الزاوية بـ 4 فتعطي π ، وعند
الجيب معدوماً والكوسينوس -1 .

$$(1+i)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4$$

5. نعالج المقام طويلة $\sqrt{3}+i$ هي 2 وزاويته $\frac{\pi}{6}$ ، فالقوّة الثالثة تعطي الطويلة 8 والزاوية $\frac{\pi}{2}$ ، وهذه زاوية العدد
البحت الموجب.

$$(\sqrt{3}+i)^3=2^3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8i$$

6. نقسم بقيت قسمة بسيطة. نضرب البسط والمقام بـ i للتخلّص من i في المقام، فيصير المقام $8i^2 = -8$.

$$w = \frac{-4}{8i} = \frac{-4i}{8i^2} = \frac{-4i}{-8} = \frac{i}{2}$$

الكتاب يقولها صراحةً: عند حساب القوى يُفضّل استعمال التمثيل المثلّثي. كل أسّ أكبر من 2 هو إشارة لك بأن تترك الشكل

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

متى تصلح هذه القواعد

قبل أن تغلق الدرس، انتبه إلى شرطين صغيرين يسقطان كثيراً في الامتحان، وكلاهما مكتوب في نصّ المبرهنتين.

الشرط الأوّل: العددان غير معدومين. الطويلة $|0| = 0$ معرّفة تماماً ولا مشكلة فيها، لكن $\arg 0$ غير معرّفة، لأنّ ال
اتّجاهاً. فكل سطر فيه $\arg$ يفترض ضمناً أنّ العدد غير معدوم.

انتبه: الشرط الثاني: القوس (2π) في نهاية كل سطر عن الزاوية جزء من العبارة. $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \ (2\pi)$
تساوياً بين عددين، بل بين صنفين. لهذا يحقّ لك أن تضيف أو تطرح دورة كاملة لتُرجع الزاوية إلى مجال مألوف، كما فعلنا في ال
صارت $-\frac{5\pi}{3}$ هي $\frac{\pi}{3}$.

وهذه القواعد الأربع مجتمعة، كما مرّت في الدرس. الثلاث الأولى مساواة، والرابعة متراجحة، وهذا الفرق بالذات هو ما يُسأ

$$|zz'| = |z||z'| \qquad \arg(zz') = \arg z + \arg z' \ (2\pi)$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \qquad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \ (2\pi)$$

$$|z^n| = |z|^n \qquad \arg(z^n) = n\arg z \ (2\pi)$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

تذكّر: الفكرة التي تحمل بقيّة الوحدة: الضرب بعدد عقدي هو تكبير بطويلته ودوران بزاويته. الدرس القادم سيكتب هذه الفكرة ب
بعد، هي الشكل الأسّي.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 98 إلى 100 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.