الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

مجموعة الأعداد العقديّة

من أين جاءت هذه الأعداد، وكيف نحسب بها

الأعداد العقديّة . الوحدة 4 . الدرس 1

خذ المعادلة $x^2 = -4$ وجرّب أي عدد تعرفه. مربّع 2 هو 4 . ومربّع -2 هو أيضاً 4 . أي عدد تضربه بنفسه يعطيك نتيجة موجبة أو صفراً، فلا شيء يعطي -4 . إذن المعادلة بلا حلّ. في هذا الدرس نرى ماذا فعل الرياضيّون بدل أن يتوقّفوا هنا.

الفكرة: عدد جديد اسمه i

الفكرة أبسط ممّا تظنّ. قالوا: ليكن هناك عدد جديد، نسمّيه i ، ونتّفق على شيء واحد فقط عنه.

وهذا الشيء الواحد هو أنّ مربّعه يساوي ناقص واحد.

$$i^2 = -1$$

هذا كل شيء. لا قاعدة ثانية، ولا شرح طويل. عدد جديد واحد، واتّفاق واحد. أمّا لماذا الحرف i ، فهو أوّل حرف من كلمة imaginaire، أي تخيّلي. مجرّد اسم.

تذكّر: i عدد نحسب به كما نحسب بأي عدد آخر. الفرق الوحيد أنّ مربّعه سالب.

كيف يحلّ هذا معادلتنا

عد إلى المعادلة $x^2 = -4$. اكتب -4 على شكل 4 مضروباً بـ -1 .

والآن ضع i^2 مكان -1 ، لأنّهما متساويان. صار الطرف الأيمن مربّعاً كاملاً.

$$x^2 = 4 \cdot (-1) = 4\,i^2 = (2i)^2$$

إذا تساوى مربّعا عددين، فالعددان متساويان أو متعاكسان. إذن $x = 2i$ أو $x = -2i$. المعادلة التي لم يكن لها حلّ صار لها حلّان.

جرّب الطريقة نفسها على هذه المعادلة:

$$x^2 = -9$$

أ) $x = \pm 9i$
ب) $x = \pm 3i$
ج) لا يوجد حلّ

ب. صحيح. -9 هي 9 مضروبة بـ -1 ، أي $9\,i^2$ ، وهذا مربّع $3i$. فالحلّان $3i$ و $-3i$.

شكل العدد العقدي

ماذا يحدث لو جمعنا عدداً عادياً مع عدد فيه i ؟ نحصل على شيء مثل $3 + 2i$. هذا هو العدد العقدي.

كل عدد عقدي يتكوّن من قطعتين: قطعة بلا i ، وقطعة مع i . مثل العنوان تماماً، فيه اسم الشارع ورقم البناء، ولا يكفي أحدهما وحده.

نكتب الشكل العام هكذا، حيث a و b عددان حقيقيان عاديّان:

$$z = a + i\,b$$

تذكّر: القطعة الأولى a اسمها الجزء الحقيقي. القطعة الثانية b اسمها الجزء التخيلي.

تعريف: الشكل الجبري

$z = a + i\,b, \quad a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ هذه الكتابة وحيدة: العددان a و b معيّنان تماماً.

$\mathrm{Re}(z) = a$ الجزء الحقيقي، وهو عدد حقيقي.

$\mathrm{Im}(z) = b$ الجزء التخيلي، وهو أيضاً عدد حقيقي. الحرف i ليس جزءاً منه.

$\mathrm{Im}(z) = 0$ شرط لازم وكافٍ لكون z عدداً حقيقياً.

$\mathrm{Re}(z) = 0$ شرط لازم وكافٍ لكون z عدداً تخيّلياً بحتاً.

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ الطويلة، وهي طول القطعة OM حيث M صورة العدد z .

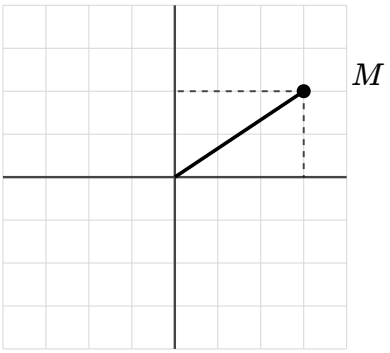
$$a + ib = a' + i\,b'$$
$$\iff a = a'\ ,\ b = b'$$

تساوي عددين عقديين يعني تساوي الجزأين معاً، لا واحداً منهما.

الكتاب، الصفحة 103

صورة العدد في المستوي

لكل عدد عقدي مكان على الورقة. نأخذ الجزء الحقيقي على محور الفواصل، وهو الأفقي، والجزء التخيلي على محور التراتيب، وهو العمودي، فنحصل على نقطة واحدة. هذه النقطة اسمها صورة العدد، ونرمز لها بـ M .



صورة العدد $3 + 2i$ في المستوي. القطعة OM هي طويلته $|z|$.

محور الفواصل يحمل الأعداد الحقيقية، لأنّ جزءها التخيلي صفر. ومحور التراتيب يحمل الأعداد التخيّلية البحتة. فكل عدد حقيقي هو أيضاً عدد عقدي، إذ نكتبه $x = x + i \cdot 0$.

طول القطعة OM اسمه طويلة العدد. نحسبه بفيثاغورس من الضلعين a و b :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

تذكّر: الطويلة مسافة، فهي دائماً عدد حقيقي موجب أو صفر، مهما كان العدد العقدي.

انتبه: الجزء التخيلي بلا i

هذه أكثر نقطة يخطئ فيها الطلاب، فتوقّف عندها قليلاً.

في العدد $3 - 2i$ ، الجزء التخيلي هو -2 . وليس $-2i$.

لماذا؟ لأنّ الكتابة $a + ib$ تقول إنّ a و b عددان حقيقيان. الحرف i مكتوب بجانب b ، فهو ليس داخلاً في b .

$$\operatorname{Re}(3 - 2i) = 3$$
$$\operatorname{Im}(3 - 2i) = -2$$

انتبه: Re و Im يعطيان دائماً عدداً حقيقياً. إذا ظهرت i في جوابك عن الجزء التخيلي، فقد وقعت في الخطأ.

ما الجزء التخيلي لهذا العدد؟

$$z = 5 - 7i$$

أ) $-7i$
ب) 7
ج) -7

ج. صحيح. الجزء التخيلي هو المعامل وحده، من دون i .

الجمع والضرب

الجمع سهل: اجمع القطعة الحقيقية مع الحقيقية، والتخيلية مع التخيلية. كما تجمع دنانير مع دنانير وقروشاً مع قروش.

الضرب: افتح القوسين كالمعتاد، ثم في النهاية بدّل كل i^2 بـ -1 . هذا التبديل الأخير هو كل الحكاية.

انتبه: الجمع يوزَّع على الجزأين، أمّا الضرب فلا. الجداء يخلط القطعتين عبر i^2 ، فلا تكتب أبداً $\operatorname{Re}(z\,z') = \operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z')$. الكتاب يحذّر من هذا بالأحمر.

جرّب بنفسك مع $(3+2i)(3-2i)$: تحصل على $9-6i+6i-4i^2$. الحدّان الأوسطان يحذفان بعضهما، ويبقى $9-4i^2$ ، أي $9+4$ لأنّ $i^2=-1$. النتيجة 13 ، وهي عدد حقيقي.

$$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$$

تذكّر: ضرب عدد عقدي بمرافقه يعطي دائماً عدداً حقيقياً، والإشارة بينهما زائد لا ناقص.

قواعد الحساب في مجموعة الأعداد العقديّة

$i\times i=i^2=-1$ القاعدة الوحيدة الجديدة. كل ما عداها حساب معتاد.

$z+z'=(a+a')+i(b+b')$ الجمع يتم جزءاً جزءاً.

$z\,z'=aa'-bb'+i(ab'+ba')$ الضرب يخلط الجزأين، لأنّ i^2 تعطي ناقص واحد.

$(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$ النتيجة عدد حقيقي دائماً. لاحظ الإشارة: زائد، لا ناقص.

$\mathrm{Re}(z+z')=\mathrm{Re}(z)+\mathrm{Re}(z')$
$\mathrm{Im}(z+z')=\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Im}(z')$
الجزآن يتوزّعان على الجمع. انتبه: هذا لا يصحّ في الضرب.

$\frac{1}{z}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$ مقلوب عدد عقدي غير معدوم.

الكتاب، الصفحة 104

احسب هذا الجداء قبل أن ننتقل إلى القسمة:

$$(3+2i)(3-2i)$$

أ) 13
ب) 5
ج) $9+4i$

أ. صحيح. $3^2+2^2=9+4=13$ ، عدد حقيقي. هذه هي الحيلة التي سنستعملها في القسمة.

القسمة، وهنا الحيلة

القسمة على عدد عقدي ليست مسموحة كما هي، لأنّ النتيجة يجب أن تكون على الشكل $a+ib$ ، والكسر الذي مقامه عقدي ليس كذلك.

الحيلة تأتي من الخطوة السابقة: نضرب البسط والمقام بمرافق المقام، فيصير المقام عدداً حقيقياً، وعندها نستطيع القسمة.

المرافق يعني نفس العدد مع قلب إشارة الجزء التخيلي. مرافق $3+2i$ هو $3-2i$.

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

تذكّر: كلّما رأيت مقاماً عقدياً، فكّر فوراً بالمرافق.

الآن نطبّق حيلة المرافق على مثال كامل. نضع $z_1=3+2i$ ، والمطلوب كتابة مقلوبه بالشكل الجبري، ثمّ قراءة جزأيه الحقيقي والتخيلي.

$$\frac{1}{z_1}=? \qquad z_1=3+2i$$

1. نتأكّد أوّلاً أنّ المقلوب موجود القسمة على صفر ممنوعة هنا كما هي ممنوعة دائماً. فلنتأكّد أنّ z_1 ليس صفراً. جزؤه الحقيقي 3 وجزؤه التخيلي 2 ، وكلاهما ليس صفراً، إذن العدد غير معدوم والمقلوب موجود.

$$z_1\neq 0$$

2. لماذا لا نتوقّف هنا؟ الجواب المطلوب يجب أن يكون على الشكل $a+ib$ بعددين حقيقيين. أمّا كسر مقامه $3+2i$ فليس على هذا الشكل، لأنّ المقام ما زال عقدياً. لذلك نضرب البسط والمقام بمرافق المقام، أي بـ $3-2i$. ضرب البسط والمقام بالعدد نفسه لا يغيّر قيمة الكسر.

$$\frac{1}{3+2i}=\frac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)}$$

3. المقام يصير حقيقياً، وهنا الخطأ الشائع نستعمل القاعدة $(a+ib)(a-ib)=a^2+b^2$. الإشارة زائد وليست ناقص. السبب: عند فتح القوسين يظهر الحدّ $-i^2b^2$ ، وبما أنّ i^2 تساوي -1 فإنّ $-i^2b^2$ تساوي $+b^2$. كثيرون يكتبون $9-4=5$ ، والصواب $9+4=13$.

$$\begin{aligned}(3+2i)(3-2i) &= 3^2+2^2\\ &= 9+4\\ &= 13\end{aligned}$$

4. نفصل الجزأين صار المقام عدداً حقيقياً، أي 13 . الآن نقسم كل حدّ من البسط عليه على حدة، تماماً كما نفعل مع أي كسر عادي.

$$\frac{1}{z_1}=\frac{3-2i}{13}=\frac{3}{13}-\frac{2}{13}\,i$$

5. نقرأ الجواب العدد الآن على الشكل $a+ib$ تماماً. الجزء الحقيقي هو الكسر الأوّل، والجزء التخيلي هو الكسر الذي بجانب i ، من دون i نفسها.

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_1}\right)=\frac{3}{13}$$
$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z_1}\right)=-\frac{2}{13}$$

احفظ هذه الخطوة وحدها، فهي تحلّ كل مسائل القسمة في هذه الوحدة: للتخلّص من مقام عقدي اضرب البسط والمقام بمرافق المقام.

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 90 إلى 92 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.