الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقيّة

المعادلة التي كانت بلا حلّ في الأعداد الحقيقية يصبح لها جذران مترافقان

الأعداد العقديّة . الوحدة 4 . الدرس 6

في السنة الماضية كنت تحسب $\Delta = b^2 - 4ac$ ، فإذا خرج سالباً كتبت: لا حلّ، وأغلقت الدفتر. تلك الجملة لم تكن خاطئة، لكنّها كانت ناقصة: كان ينقصها أن تقول أين لا حلّ. الحلّ موجود، غير أنّه لا يسكن على المستقيم الحقيقي. في هذا الدرس نفتح الدفتر من جديد ونرى أين يسكن، فنجد أنّ لكلّ معادلة من الدرجة الثانية بأمثال حقيقية جذرين في $\mathbb{C}$ دائماً.

أين كان الطريق مسدوداً

نذكّر أنّ المعادلة من الدرجة الثانية ذات الأمثال الحقيقية هي كلّ معادلة من الشكل $aX^2 + bX + c = 0$ بالمجهول X ، حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية و $a \neq 0$.

وحلّ هذه المعادلة في $\mathbb{C}$ هو إيجاد جميع الأعداد العقديّة w التي تحقّق $aw^2 + bw + c = 0$ ، ونسمّي w حلّاً للمعادلة أو جذراً لها.

الأمثال حقيقية، لكنّ المجهول لم يعد كذلك. هذا هو كلّ الفرق، وهو فرق يكفي: ما كان يوقفنا سابقاً هو أنّ مربّع أيّ عدد حقيقي موجب أو معدوم، فلا يمكن أن يساوي عدداً سالباً تماماً. في $\mathbb{C}$ سقط هذا المانع مع $i^2 = -1$.

> **تذكّر:** قواعد الحساب في $\mathbb{C}$ هي نفسها قواعد الحساب في $\mathbb{R}$. كلّ خطوة جبرية كنّا نفعلها هناك ما زالت مسموحة هنا، ولذلك سنعيد الطريق نفسه حرفاً بحرف.

وسنبرهن أنّ لهذه المعادلة عموماً حلّين في $\mathbb{C}$ ، يمكن أن يكونا منطبقين. أي أنّ الحالة التي كنّا نكتب فيها جملة انعدام الحلّ قد اختفت من القائمة تماماً.

الشكل القانوني والمميّز

لحلّ هذه المعادلة نعمد كما في حالة $\mathbb{R}$ إلى تحليل $az^2 + bz + c$ إلى جداء ضرب عاملين. ولهذا الهدف نسعى إلى كتابته بالشكل القانوني، أي أن نُكمل المربّع.

فإذا وضعنا كما جرت العادة $\Delta = b^2 - 4ac$ أمكننا أن نكتب:

$$az^2+bz+c=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$
$$=a\left(\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

ولأنّ $a\neq 0$ يمكن قسمة الطرفين عليه دون أن نخسر حلّاً أو نكسب حلّاً. استنتجنا إذن أنّ حلّ المعادلة $az^2+bz+c=0$ يؤول إلى حلّ:

$$\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$$

حيث نسمّي العدد Δ مُميّز المعادلة. لاحظ أنّ الأمثال حقيقية، فالمميّز عدد حقيقي، ولذلك يبقى السؤال عن إشارته سؤالاً له معنى. لو كانت الأمثال عقديّة لما كان لسؤال الإشارة معنى أصلاً.

تذكّر: المميّز هنا هو نفسه مميّز السنة الماضية: $\Delta=b^2-4ac$. ما تغيّر ليس الحساب، بل ما نفعله حين يخرج سالباً.

احسب مميّز هذه المعادلة.

$$z^2+z+1=0$$

أ) -3
ب) 5
ج) 3

أ. صحيح. هنا $a=1$ و $b=1$ و $c=1$ ، فيكون $\Delta=1^2-4\cdot 1\cdot 1=-3$.

الحالات الثلاث للمميّز

صارت المعادلة $\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$ ، فكلّ ما بقي هو أن نقرأها حسب إشارة Δ . ثلاث إشارات، ثلاث حالات.

إذا كان $\Delta>0$ فنحن نعلم أنّ للمعادلة حلّين حقيقيين وحلّين فقط. ولأنّ $\mathbb{R}$ محتواة في $\mathbb{C}$ ، استنتجنا أنّ هذين هما أيضاً حلّاها في $\mathbb{C}$ ، ولا حلّ ثالثاً:

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

إذا كان $\Delta = 0$ بقي $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ ، فللمعادلة حلّ وحيد فقط هو $z = -\frac{b}{2a}$ نسمّيه جذراً مضاعفاً. واسمه مضاعف لأنّ الشكل القانوني يصير هنا $az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2$ ، فالعاملان منطبقان. وهذا هو معنى ما وعدنا به: حلّان في $\mathbb{C}$ انطبق أحدهما على الآخر.

تبقى الحالة التي جئنا من أجلها. إذا كان $\Delta < 0$ فالعدد $-\Delta$ موجب، وله جذر تربيعي حقيقي $\sqrt{-\Delta}$. هنا تدخل i دخولاً نظيفاً: نستفيد من المساواة $\Delta = \left(i\sqrt{-\Delta}\right)^2$ لنكتب فرق مربّعين.

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2$$
$$= \left(z + \frac{b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)$$

وجداء يساوي الصفر يعني أنّ أحد عامليه معدوم. إذن في هذه الحالة يكون للمعادلة $az^2 + bz + c = 0$ حلّان عقديان مترافقان هما:

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

انظر إلى الصيغتين قبل أن تحفظهما: الجزء الحقيقي واحد في الاثنين وهو $-\frac{b}{2a}$ ، والجزء التخيلي متعاكس. وهذا بالضبط تعريف عددين مترافقين.

حلول المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ في $\mathbb{C}$

$\Delta = b^2 - 4ac$ مُميّز المعادلة، والأمثال a و b و c حقيقية مع $a \neq 0$.

الحالة $\Delta > 0$: حلّان حقيقيان مختلفان، ولا ثالث لهما في $\mathbb{C}$.

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

الحالة $\Delta = 0$: حلّ وحيد، نسمّيه جذراً مضاعفاً.

$$z = -\frac{b}{2a}$$

الحالة $\Delta < 0$: حلّان عقديان مترافقان.

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$
$$z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

الكتاب، الصفحة 104

انتبه: لا تكتب $\sqrt{\Delta}$ حين يكون Δ سالباً. الرمز $\sqrt{\ }$ محجوز للأعداد الموجبة، والذي نأخذ جذره هنا هو $-\Delta$ وهو موجب، ثمّ نضرب الناتج بـ i . ولهذا تظهر i خارج الجذر لا داخله.

مثال الكتاب خطوة خطوة

نأخذ المثال كما هو في الكتاب: المطلوب حلّ هذه المعادلة في $\mathbb{C}$.

$$z^2 + 6z + 34 = 0$$

1. نقرأ الأمثال نطابق المعادلة مع الشكل $az^2 + bz + c = 0$ ، فنلاحظ هنا أنّ $a = 1$ و $b = 6$ و $c = 34$.

$$a = 1 \qquad b = 6 \qquad c = 34$$

2. نحسب المميّز بالتعويض في $\Delta = b^2 - 4ac$. لاحظ أنّ $4 \cdot 1 \cdot 34 = 136$ أكبر من 36 ، فالفرق سالب.

$$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 34 = 36 - 136 = -100$$

3. نقرأ الإشارة المميّز سالب، إذن للمعادلة حلّان عقديان مترافقان. في $\mathbb{R}$ كنّا نتوقّف هنا ونكتب: لا حلّ. أمّا في $\mathbb{C}$ فالعمل يبدأ الآن.

$$\Delta = -100 < 0$$

4. نأخذ جذر المعاكس المعاكس $-\Delta = 100$ موجب وجذره التربيعي 10 . فيكون $i\sqrt{-\Delta} = 10i$ ، وهذا هو الذي يدخل البسط.

$$\sqrt{-\Delta} = \sqrt{100} = 10 \qquad i\sqrt{-\Delta} = 10i$$

5. نعوّض في الصيغتين المقام $2a = 2$ ، والبسط يبدأ بـ $-b = -6$. ثمّ نقسم الحدّين معاً على 2 ، لا الحدّ الأوّل وحده.

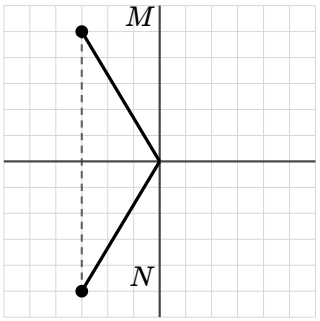
$$z_1 = \frac{-6 - 10i}{2} = -3 - 5i$$
$$z_2 = \frac{-6 + 10i}{2} = -3 + 5i$$

6. نتحقّق بلا إعادة الحساب مجموع الجذرين -6 وهو $-\frac{b}{a}$ ، وجداؤهما $(-3)^2 + 5^2 = 34$ وهو $\frac{c}{a}$. المطابقة تامّة، فالحلّان صحيحان.

$$z_1 + z_2 = -6 \qquad z_1 z_2 = 34$$

الترتيب ثابت ولا يتغيّر: اقرأ الأمثال، احسب Δ ، اقرأ إشارته، ثمّ عوّض في الصيغة التي تخصّ تلك الحالة وحدها.

$$z = \frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad (\Delta < 0)$$



M صورة $z_2 = -3 + 5i$ و N صورة $z_1 = -3 - 5i$. النقطتان متناظرتان حول محور الفواصل، وبُعداهما عن المبدأ متساويان.

حلّ هذه المعادلة في $\mathbb{C}$.

$$z^2 - 2z + 3 = 0$$

أ) لا حلّ لها
ب) $1 \pm i\sqrt{2}$
ج) $1 \pm i\sqrt{8}$

ب. صحيح. $\Delta = -8$ و $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ ، فيكون $\frac{2 \pm 2i\sqrt{2}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}$.

المجموع والجداء والتفريق

إذا عرفنا الجذرين فقد عرفنا كثير الحدود كلّه. بوجه عام إذا كان z_1 و z_2 جذري المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث $a\neq 0$ ، فيمكن تفريق كثير الحدود من الدرجة الثانية aX^2+bX+c بالشكل الآتي:

$$aX^2+bX+c=a(X-z_1)(X-z_2)$$

وهنا يمكن أن يكون z_1 و z_2 حقيقيين مختلفين عندما $\Delta>0$ ، أو منطبقين $z_1=z_2$ عندما $\Delta=0$ ، أو عقديين مترافقين عندما $\Delta<0$. التفريق واحد في الحالات الثلاث.

تفريق كثير الحدود من الدرجة الثانية

$aX^2+bX+c=a(X-z_1)(X-z_2)$ حيث z_1 و z_2 جذرا المعادلة $az^2+bz+c=0$ مع $a\neq 0$ ، في الحالات الثلاث جميعها.

الكتاب، الصفحة 105

افتح القوسين في هذا التفريق وقارن الأمثال حدّاً بحدّ. الحدّ من الدرجة الأولى يعطي $b=-a(z_1+z_2)$ ، والحدّ الثابت يعطي $c=az_1z_2$. نقسم على a فتخرج علاقتان تُستعملان كثيراً:

$$z_1+z_2=-\frac{b}{a}$$
$$z_1z_2=\frac{c}{a}$$

فائدتهما مزدوجة: تتحقّق بهما من حلّ حسبته، كما فعلنا في المثال، وتبني بهما معادلة إذا أُعطيت جذراها.

انتبه: المجموع هو معاكس $\frac{b}{a}$ ، لا $\frac{b}{a}$ نفسه. في معادلة مكتوبة $z^2+pz+q=0$ يكون $z_1+z_2=-p$ و $z_1z_2=q$. نسيان هذه الإشارة الواحدة خطأ متكرّر في الامتحان.

ما مجموع جذري هذه المعادلة وما جداؤهما؟

$$z^2 - 5z + 9 = 0$$

أ) $z_1 + z_2 = -5$, $z_1 z_2 = 9$
ب) $z_1 + z_2 = 5$, $z_1 z_2 = -9$
ج) $z_1 + z_2 = 5$, $z_1 z_2 = 9$

ج. صحيح. $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} = 5$ و $z_1 z_2 = \frac{c}{a} = 9$ ، مع $a = 1$.

أخطاء تُكلّف درجات

انتبه: الجملة القائلة إنّ المميّز السالب يعني انعدام الحلّ صحيحة في $\mathbb{R}$ وخاطئة في $\mathbb{C}$. فمتى طلب السؤال الحلّ في $\mathbb{C}$ ، لم يكن المميّز السالب نهاية بل بداية: هو يقول لك إنّ الجذرين مترافقان، لا إنّهما غير موجودين.

الخطأ الثاني يخصّ الجذر التربيعي. كلّ عدد عقدي غير معدوم له جذران تربيعيان لا جذر واحد، وهما متعاكسان. مثلاً للعدد -100 الجذران $10i$ و $-10i$ ، لأنّ $(10i)^2 = -100$ و $(-10i)^2 = -100$ أيضاً.

تذكّر: من هنا تأتي الإشارة $\pm$ في صيغة الحلّين. من يكتب جذراً واحداً يخسر نصف الجواب.

والخطأ الثالث أدقّ، وهو يظهر في تمرين الكتاب الذي يطلب معادلة من جذريها. لأنّ الأمثال حقيقية، فإنّ مرافق كلّ جذر جذرٌ أيضاً. ولذلك لا يمكن لعددين غير مترافقين أن يكونا جذري معادلة بأمثال حقيقية.

انتبه: خذ عددي الكتاب $1 + 2i$ و $3 - 5i$. هما ليسا مترافقين، فمرافق $1 + 2i$ هو $1 - 2i$. ولهذا يقول الكتاب في ذلك التمرين عددين عقديين p و q . وهنا لا يمكن أن يكونا حقيقيين، لأنّ الجذرين غير مترافقين. وهذا ليس تفصيلاً، هو جوهر السؤال.

وأخيراً مثال يربط هذا الدرس بالشكل المثلّثي. خذ من تمارين الكتاب المعادلة $z^2 - 2(\cos\theta)z + 1 = 0$ حيث θ عدد حقيقي. مميّزها $\Delta = 4\cos^2\theta - 4 = -4\sin^2\theta$ ، وهو سالب أو معدوم دائماً، فيكون:

$$z_1 = \cos\theta - i\sin\theta$$
$$z_2 = \cos\theta + i\sin\theta$$

تذكّر: الجذران هنا طويلة كلّ منهما 1 ، وزاويتاهما θ و $-\theta$. فالمعادلة من الدرجة الثانية ليست باباً مغلقاً على نفسه: هي تُخرج لك أعداداً تقرؤها بالشكل المثلّثي مباشرة.

المصدر: الرياضيات، الجزء الثاني، الصفحات 104 إلى 105 من الطبعة الرسمية 2025 / 2026.