الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: نهايات مهمّة تتعلّق بالتابع الأسّي

التابع الأسّي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. ما قيمة $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^3}$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1، لأنّ البسط والمقام يكبران معاً

2. ما قيمة $\lim_{x\to-\infty} x^4 e^x$ ؟

أ) $+\infty$

ب) $-\infty$

ج) 0

3. ما قيمة $\lim_{x\to+\infty} \left(x - e^x\right)$ ؟

أ) $-\infty$

ب) $+\infty$

ج) حالة عدم تعيين لا تُحسب

4. ما قيمة $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{2e^x + 1}{1 + e^x}$ ؟

أ) 2

ب) 1

ج) حالة عدم تعيين من النمط $\frac{\infty}{\infty}$ ، فلا نهاية

5. ما قيمة $\lim_{x\to+\infty} \left(e^x - x^2\right)$ ؟

أ) $-\infty$

ب) 0

ج) $+\infty$

6. ليكن $f(x) = e^{-x} + x - 2$. ما المقارب للخطّ البياني C في جوار $+\infty$ ؟

أ) المستقيم $y = 0$ ، لأنّ $e^{-x} \to 0$

ب) المستقيم المائل $d : y = x - 2$

ج) لا مقارب، لأنّ f يسعى إلى $+\infty$

7. ولنفس التابع: أين يقع C بالنسبة إلى d ؟

أ) فوقه عند كلّ عددٍ حقيقيّ

ب) لا يمكن تحديد ذلك من النهاية

ج) فوقه بعد نقطة تقاطعٍ واحدة وتحته قبلها

8. ولنفسه: ما إشارة $f'(x)$ ؟

أ) موجبةٌ عند كلّ x ، لأنّ $e^{-x} > 0$

ب) سالبةٌ عند كلّ x ، لأنّ $(e^{-x})' = -e^{-x}$

ج) إشارة x نفسها: سالبةٌ قبل الصفر وموجبةٌ بعده

9. ولنفسه: لإثبات أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلّين، نقسم $\mathbb{R}$ إلى مجالَي الرتابة. أيّ تقسيمٍ هو الصحيح؟

أ) $]-\infty, 0]$ و $[0, +\infty[$

ب) $]-\infty, 0[$ و $[0, +\infty[$

ج) $]-\infty, 0[$ و $]0, +\infty[$

10. ما قيمة $\lim_{x \to +\infty} 2xe^{-x}$ ؟

أ) $+\infty$

ب) 0

ج) 2

11. ما قيمة $\lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}}$ ؟

أ) $+\infty$

ب) 1، لأنّ $e^0 = 1$

ج) لا وجود لها

12. ما قيمة $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ؟

أ) e

ب) 1، لأنّ الأساس يسعى إلى 1

ج) $+\infty$

سلّم التصحيح

1. ب نعم، وهذه هي المبرهنة 7 عند $n = 3$. ولاحظ أنّ الأمر لا يتعلّق بحجم n : لو كان $n = 100$ لكانت النتيجة نفسها، وإن تأخّرت.

2. ج نعم، النتيجة 8 عند $n = 4$. الأُسّ موجبٌ والنهاية عند $-\infty$ ؛ الوجهتان تمشيان معاً في هذه النتيجة، وتتعاكسان في المبرهنة 7 .

3. أ نعم. أخرِج e^x : يصير التابع $e^x\left(\frac{x}{e^x} - 1\right)$ ، وما في القوس يسعى إلى -1 ، فالجداء يسعى إلى $-\infty$.

4. أ نعم. أخرِج e^x من البسط ومن المقام واختصره: يبقى $\frac{2+e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، و $e^{-x} \to 0$.

5. ج نعم. أخرِج e^x فتصير العبارة $e^x\left(1 - x^2e^{-x}\right)$ ، والمبرهنة 7 عند $n = 2$ تعطي $x^2e^{-x} \to 0$.

6. ب نعم. الفرق $f(x) - (x - 2)$ يساوي e^{-x} بالضبط، ونهايته صفر عند $+\infty$. وهذا هو تعريف المقارب المائل حرفيّاً.

7. أ نعم، والفرق هو الدليل: $f(x) - (x - 2) = e^{-x}$ ، وهو موجبٌ تماماً عند كلّ x بلا استثناء. لذلك يكتب الكتاب «كاملاً».

8. ج نعم. $f'(x) = 1 - e^{-x} = e^{-x}\left(e^x - 1\right)$ ، والعامل الأوّل موجبٌ دائماً، فتبقى إشارة $e^x - 1$ ، وهي إشارة x . والقيمة الصغرى $f(0) = -1$.

9. ب نعم، والقوسان مقصودان. المجالان منفصلان تماماً، وصورة الأوّل $]-1, +\infty[$ وصورة الثاني $[-1, +\infty[$. الصفر ينتمي إلى كليهما، فهناك حلّ في كلٍّ منهما، ولا حلّ يُحسب مرّتين.

10. ب نعم. $2xe^{-x} = 2 \times xe^{-x}$ ، والمبرهنة 7 عند $n = 1$ تعطي $xe^{-x} \to 0$. والعامل الثابت 2 لا يغيّر شيئاً.

11. ج نعم. من اليمين $+\infty$ ومن اليسار 0 ، والنهايتان الجانبيّتان مختلفتان، فلا نهاية عند الصفر. اكتب الجهتين دائماً حين يكون المتحوّل في المقام.

12. أ نعم. اكتبها $\exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$ ، ونهاية الأُسّ هي 1 ، فالنتيجة e^1 . وهي نفسها $\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ بتغيير المتحوّل.

نهايات مهمّة تتعلّق بالتابع الأسّي . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 177 إلى 181 . basita123.com