الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: معادلات تفاضليّة بسيطة

التابع الأسّي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. ما حلول المعادلة التفاضليّة $y' = 3y$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $f(x) = k\,e^{3x}$

ب) $f(x) = e^{3x}$

ج) $f(x) = 3e^{x}$

2. ما حلول المعادلة $y' + 2y = 0$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $f(x) = k\,e^{2x}$

ب) $f(x) = k\,e^{-2x}$

ج) $f(x) = k\,e^{-2x} + 2$

3. ما حلول المعادلة $3y' = 5y$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $f(x) = k\,e^{5x}$

ب) $f(x) = k\,e^{\frac{3}{5}x}$

ج) $f(x) = k\,e^{\frac{5}{3}x}$

4. ما حلول المعادلة $2y' + 3y = 0$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $f(x) = k\,e^{-3x}$

ب) $f(x) = k\,e^{-\frac{3}{2}x}$

ج) $f(x) = k\,e^{\frac{3}{2}x}$

5. حلّ المعادلة $y' = 2y$ الذي يحقّق $f(0) = 1$ هو:

أ) $f(x) = e^{2x}$

ب) $f(x) = k\,e^{2x}$ عند كلّ k

ج) $f(x) = 2e^{2x}$

6. حلّ المعادلة $y' + 5y = 0$ الذي يمرّ خطّه البياني بالنقطة $A(-2,\,1)$ هو:

أ) $f(x) = e^{10}\,e^{-5x}$

ب) $f(x) = e^{-5x}$

ج) $f(x) = e^{-5(x+2)}$

7. في المعادلة $y' + 2y = 0$ ، ميل المماس لخطّ الحلّ عند الفاصلة -2 يساوي $\frac{1}{2}$. ما الحلّ؟

أ) $f(x) = \frac{1}{2}\,e^{-2(x+2)}$

ب) $f(x) = \frac{1}{4}\,e^{-2(x+2)}$

ج) $f(x) = -\frac{1}{4}\,e^{-2(x+2)}$

8. ما حلول المعادلة $y' = 2y + 1$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $g(x) = k\,e^{2x} - \frac{1}{2}$

ب) $g(x) = k\,e^{2x} + \frac{1}{2}$

ج) $g(x) = k\,e^{2x+1}$

9. ما حلول المعادلة $y + 3y' = 2$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $g(x) = k\,e^{-\frac{1}{3}x} - 2$

ب) $g(x) = k\,e^{-\frac{1}{3}x} + 2$

ج) $g(x) = k\,e^{-3x} + 2$

10. ما حلول المعادلة $2y' = y - 1$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $g(x) = k\,e^{\frac{1}{2}x} - 1$

ب) $g(x) = k\,e^{2x} + 1$

ج) $g(x) = k\,e^{\frac{1}{2}x} + 1$

11. في المعادلة $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ ، هل التابع الثابت $x \mapsto -\frac{b}{a}$ حلٌّ لها؟

أ) لا، لأنّ التوابع الثابتة مشتقّها صفر ولا تحقّق معادلةً تفاضليّة

ب) نعم، وهو يقابل $k = 0$ في صيغة الحلول

ج) نعم، لكنّه ليس من عائلة الحلول لأنّه لا يحوي أُسّيّاً

12. لحلّ المعادلة $y' + 3y = 2e^{-x}$ ، هل تكفي المبرهنة 11 ؟

أ) لا، لأنّ الطرف الأيمن ليس ثابتاً

ب) نعم، بوضع $b = 2$ و $a = -3$

ج) نعم، لأنّ $2e^{-x}$ أُسّيّ والمبرهنة تخصّ التوابع الأُسّيّة

سلّم التصحيح

1. أ نعم، وهي واحدةٌ من ثلاث معادلاتٍ فقط في تمارين الكتاب تأتي مرتّبةً أصلاً. الوسيط $a = 3$ يُقرأ مباشرةً، و k حرٌّ في $\mathbb{R}$.

2. ب نعم. ننقل $2y$ فتصير $y' = -2y$ ، والوسيط -2 ينتقل إلى الأُسّ بإشارته.

3. ج نعم. القسمة على 3 تعطي $y' = \frac{5}{3}y$ ، والوسيط هو الكسر كاملاً، لا بسطه ولا مقامه.

4. ب نعم، وهذه المعادلة بعينها وردت في دورة 2017 الدورة الثانية بأربعين درجة. حركتان: انقل فتنقلب الإشارة، ثمّ اقسم على 2 .

5. أ نعم. الحلول ke^{2x} ، والشرط يعطي $ke^0 = 1$ ، أي $k = 1$. ولاحظ أنّ $e^0 = 1$ هو ما يجعل هذه الحالة أسهل من غيرها.

6. ج نعم. الحلول ke^{-5x} ، والشرط $ke^{10} = 1$ يعطي $k = e^{-10}$ ، فيكون $f(x) = e^{-5x-10} = e^{-5(x+2)}$. وهذه الصورة الأخيرة هي التي تُظهر النقطة مباشرة.

7. ج نعم. $f(x) = ke^{-2x}$ و $f'(x) = -2ke^{-2x}$ ، فالشرط $-2ke^4 = \frac{1}{2}$ يعطي $k = -\frac{1}{4}e^{-4}$. والإشارة السالبة تعني أنّ الخطّ كلّه تحت محور الفواصل.

8. أ نعم. $a = 2$ و $b = 1$ ، والحدّ الثابت $-\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$. وأسرع تحقّقٍ: التابع الثابت $-\frac{1}{2}$ وحده يجب أن يحلّ المعادلة، و $2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$ فعلاً.

9. ب نعم. الترتيب: $3y' = 2 - y$ ، ثمّ القسمة على 3 تعطي $y' = -\frac{1}{3}y + \frac{2}{3}$. وتحقّق بالتابع الثابت 2 : مشتقّه صفر، و $-\frac{1}{3}(2) + \frac{2}{3} = 0$.

10. ج نعم. القسمة على 2 تعطي $y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$ ، فـ $a = \frac{1}{2}$ و $b = -\frac{1}{2}$ ، والحدّ الثابت $-\frac{b}{a} = 1$. وتحقّق بالتابع الثابت 1 .

11. ب نعم، وهذه هي فكرة المبرهنة 11 كلّها وإن لم يقلها الكتاب: الجواب العامّ هو حلٌّ خاصٌّ واحد، وهو الثابت، مضافاً إليه كلّ حلول المعادلة بلا b .

12. أ نعم. المبرهنة 11 مكتوبةٌ للحالة $b \in \mathbb{R}$ ، أي عددٍ ثابت. هنا الطرف الأيمن تابعٌ للمتحوّل، فيلزم مبدأ التركيب: ابحث عن حلٍّ خاصٍّ أوّلاً، ثمّ أضف إليه حلول $y' + 3y = 0$. وهذه بعينها المسألة 26 من مسائل الوحدة.

معادلات تفاضليّة بسيطة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 186 إلى 187 . basita123.com