الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: دراسة التابع الأسّي

التابع الأسّي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. ما قيمة $\lim_{x \to -\infty} e^{-x}$ ؟

أ) 0

ب) $-\infty$

ج) $+\infty$

2. ما قيمة $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{x}$ ؟

أ) 2

ب) 1

ج) 0

3. ما مشتقّ التابع $f(x) = e^{x^2}$ ؟

أ) e^{x^2}

ب) $2x\, e^{x^2}$

ج) $x^2 e^{x^2 - 1}$

4. ليكن $f(x) = e^{\frac{1}{2} - x^2}$. ما $f'(x)$ ؟

أ) $e^{\frac{1}{2} - x^2}$

ب) $-2x\, e^{\frac{1}{2} - x^2}$

ج) $\left(\frac{1}{2} - x^2\right) e^{\frac{1}{2} - x^2}$

5. لنفس التابع $f(x) = e^{\frac{1}{2} - x^2}$: ما نهايتاه عند $\pm\infty$ ، وما معادلة المقارب؟

أ) النهايتان 0 ، والمقارب $y = 0$

ب) النهايتان 1 ، والمقارب $y = 1$

ج) النهايتان $-\infty$ ، ولا مقارب أفقيّ

6. ولنفسه أيضاً: أين يبلغ f قيمته الحدّية، وكم تساوي؟

أ) قيمة عظمى عند $x = 0$ تساوي $\frac{1}{2}$

ب) لا قيمة حدّية، لأنّ f' لا ينعدم

ج) قيمة عظمى عند $x = 0$ تساوي $\sqrt{e}$

7. ولنفسه: ما $f''(x)$ ، علماً أنّ $f'(x) = -2x\,e^{\frac{1}{2}-x^2}$ ؟

أ) $\left(4x^2-2\right)e^{\frac{1}{2}-x^2}$

ب) $-2\,e^{\frac{1}{2}-x^2}$

ج) $4x^2\,e^{\frac{1}{2}-x^2}$

8. ولنفسه: عند أيّ فاصلةٍ ينعدم $f''(x)$ ؟

أ) $x = 0$

ب) $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ج) $x = \pm\frac{1}{2}$

9. ولنفسه: ما معادلة المماس d للخطّ C في النقطة التي ينعدم فيها $f'(x)$ ؟

أ) $y = \sqrt{e}\,x + \sqrt{e}$

ب) $y = x + \sqrt{e}$

ج) $y = \sqrt{e}$

10. أين يقع الخطّ البياني للتابع $x \mapsto e^x$ بالنسبة إلى مماساته؟

أ) فوق كلّ مماساته، وهذا يصحّ لكلّ تابعٍ من النمط $e^{u(x)}$

ب) تحت كلّ مماساته

ج) فوق كلّ مماساته، عدا نقطة التماس نفسها

11. ليكن $f(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$ و $g(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$. ما $f'(x)$ ؟

أ) $f'(x) = f(x)$

ب) $f'(x) = g(x)$

ج) $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)\cdot(-1)$

12. ولنفس التابعين، وليكن $h = \dfrac{g}{f}$. ما h' ؟

أ) $h' = \frac{1}{f^2}$

ب) $h' = \frac{g'}{f'} = \frac{f}{g}$

ج) $h' = \frac{f^2+g^2}{f^2}$

سلّم التصحيح

1. ج نعم. ضع $u = -x$: إذا سعى x إلى $-\infty$ سعى u إلى $+\infty$ ، ونهاية e^u هناك هي $+\infty$ بحسب المبرهنة 4 .

2. أ نعم. اضرب واقسم على 2 : $\frac{e^{2x}-1}{x} = 2 \times \frac{e^{2x}-1}{2x}$ ، والكسر الثاني هو التمهيد نفسه مع $t = 2x$ ، ونهايته 1 .

3. ب نعم. $u(x) = x^2$ و $u'(x) = 2x$ ، فيُكتب $2x$ عاملاً أمام الأُسّي، لا داخله.

4. ب نعم. $u(x) = \frac{1}{2} - x^2$ ومشتقّه $-2x$. ولاحظ أنّ إشارة f' هي إشارة $-2x$ وحدها، لأنّ الأُسّي موجبٌ دائماً.

5. أ نعم. الأُسّ $\frac{1}{2} - x^2$ يسعى إلى $-\infty$ في الجهتين، ونهاية e^u عند $u \to -\infty$ هي الصفر. فمحور الفواصل مقاربٌ أفقيّ في الجهتين.

6. ج نعم. f' يوافق إشارة $-2x$ ، فهو موجبٌ قبل الصفر وسالبٌ بعده، والقيمة هي $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \approx 1.6487$.

7. أ نعم. بقانون الجداء $f'' = -2\,e^u + (-2x)(-2x)e^u = \left(4x^2 - 2\right)e^u$ مع $u = \frac{1}{2} - x^2$.

8. ب نعم. $f''(x) = \left(4x^2 - 2\right)e^{\frac{1}{2}-x^2}$ ، والأُسّي لا ينعدم، فيبقى $4x^2 = 2$ ، أي $x^2 = \frac{1}{2}$. وعند هاتين الفاصلتين يكون $f = e^0 = 1$ بالضبط.

9. ج نعم. $f'(0) = 0$ و $f(0) = \sqrt{e}$ ، فالمماس مستقيمٌ أفقيّ ارتفاعه $\sqrt{e}$. كلّ مماسٍ في نقطةٍ حدّية يوازي محور الفواصل.

10. ج نعم. الفرق $\varphi(x) = e^x - e^m(x - m + 1)$ قيمته الصغرى 0 عند $x = m$ وحدها، وهو موجبٌ تماماً في كلّ ما عداها.

11. ب نعم. $\left(e^{-x}\right)' = -e^{-x}$ ، فيصير $f'(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$ ، وهو $g(x)$ بالضبط. وبالمثل $g' = f$.

12. أ نعم. بقانون القسمة $h' = \frac{g'f - gf'}{f^2} = \frac{f^2 - g^2}{f^2}$ ، والبسط يساوي 1 بالضبط لأنّ $f^2 - g^2 = (f-g)(f+g) = e^{-x} \times e^x = 1$.

دراسة التابع الأسّي . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 173 إلى 176 . basita123.com