الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: دراسة التوابع الأسّية بالأساس a

التابع الأسّي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. أيّاً كان a موجباً تماماً، بماذا يساوي a^x ؟

أ) $e^{a \ln x}$

ب) $e^{x \ln a}$

ج) $e^x \cdot \ln a$

2. بسّط كتابة العدد $3^{-\frac{1}{\ln 3}}$.

أ) $\frac{1}{e}$

ب) e

ج) $-\frac{1}{3}$

3. ما مشتقّ التابع $\exp_a : x \mapsto a^x$ ؟

أ) $\exp_a' = \exp_a$

ب) $\exp_a' = x\, a^{x-1}$

ج) $\exp_a' = (\ln a)\, \exp_a$

4. التابع $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ على $\mathbb{R}$:

أ) متناقصٌ تماماً

ب) متزايدٌ تماماً

ج) سالبٌ، لأنّ $\ln \frac{1}{2}$ سالب

5. ما قيمة $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

6. حلّ المتراجحة $3^x > 4$ في $\mathbb{R}$.

أ) $x > 4$

ب) $x > \frac{4}{3}$

ج) $x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$

7. حلّ المتراجحة $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 4$ في $\mathbb{R}$.

أ) $x > \frac{\ln 4}{\ln 3}$

ب) $x > -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

ج) $x < -\frac{\ln 4}{\ln 3}$

8. حلّ المعادلة $7^{x-1} = 3^{x}$ في $\mathbb{R}$.

أ) لا حلّ، لأنّ $x - 1 = x$ مستحيلة

ب) $x = \frac{\ln 7}{\ln 7 - \ln 3}$

ج) $x = \frac{\ln 7}{\ln 3}$

9. ما مشتقّ التابع $f(x) = 3^{x^2}$ ؟

أ) $f'(x) = 2x(\ln 3)\, 3^{x^2}$

ب) $f'(x) = 2x\, 3^{x^2}$

ج) $f'(x) = x^2(\ln 3)\, 3^{x^2-1}$

10. حلّ المعادلة $4^{x} + 2^{x+1} - 3 = 0$ في $\mathbb{R}$.

أ) $x = 1$ أو $x = -3$

ب) $x = 0$ أو $x = \log_2(-3)$

ج) $x = 0$

11. لماذا تستثني المبرهنة 9 الحالة $a = 1$ ؟

أ) لأنّ $\exp_1$ تابعٌ ثابت، فلا رتابة تامّة له

ب) لأنّ 1^x غير معرّف

ج) لأنّ صيغة المشتق تصير خاطئة عند $a = 1$

12. خطّا التابعين $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \left(\frac{1}{a}\right)^x$ متناظران بالنسبة إلى:

أ) المستقيم $y = x$

ب) محور التراتيب

ج) مبدأ المعلم

سلّم التصحيح

1. ب نعم، وهو تعريف الدرس الثاني على الصفحة 170 . تحقّق بالحالة $a = e$: يصير $e^{x \ln e} = e^x$ ، أي التابع الأسّي نفسه.

2. أ نعم. اكتبه $e^{-\frac{\ln 3}{\ln 3}} = e^{-1}$. وهذا السؤال بعينه ورد في دورة 2023 الدورة الثانية بعشرين درجة، مع $5^{\frac{1}{\ln 5}} = e$ ، وجداؤهما 1 .

3. ج نعم. اكتب $a^x = e^{x \ln a}$ ، فالمشتق الداخلي هو الثابت $\ln a$. وهذه هي المبرهنة 9 ، وهي المبرهنة الوحيدة في هذا الدرس.

4. أ نعم. الأساس $\frac{1}{2}$ أصغر من الواحد، فـ $\ln \frac{1}{2} < 0$ ، والمشتق $\left(\ln \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^x$ سالبٌ تماماً لأنّ العامل الثاني موجبٌ دائماً.

5. ب نعم. ضع $X = x \ln \frac{1}{2}$: جداءُ سالبٍ في سالبٍ يسعى إلى $+\infty$ ، ونهاية e^X هناك هي $+\infty$. أو ببساطة $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$.

6. ج نعم. خذ اللّوغاريتم للطرفين: $x \ln 3 > \ln 4$ ، ثمّ اقسم على $\ln 3$ وهو موجبٌ لأنّ $3 > 1$ ، فلا ينقلب الاتّجاه.

7. ج نعم. اللّوغاريتم يعطي $x \ln \frac{1}{3} > \ln 4$ ، و $\ln \frac{1}{3} = -\ln 3 < 0$ ، فالقسمة عليه تقلب الاتّجاه. ولاحظ أنّ الجواب هو الجواب السابق معكوساً في الإشارة وفي الاتّجاه معاً.

8. ب نعم، وقيمته 2.2966 تقريباً. اللّوغاريتم يعطي $(x-1)\ln 7 = x \ln 3$ ، فنجمع حدود x في طرف: $x(\ln 7 - \ln 3) = \ln 7$.

9. أ نعم. اكتبه $e^{x^2 \ln 3}$ ، فالمشتق الداخلي هو $2x \ln 3$. عاملان يخرجان معاً: $2x$ من الأُسّ، و $\ln 3$ من الأساس.

10. ج نعم. لاحظ أوّلاً أنّ $4^x = (2^x)^2$ و $2^{x+1} = 2 \cdot 2^x$. فبوضع $t = 2^x$ تصير $t^2 + 2t - 3 = 0$ بجذرين 1 و -3 ، والسالب مرفوض، فيبقى $2^x = 1$.

11. أ نعم. $1^x = 1$ عند كلّ x . ولاحظ أنّ صيغة الاشتقاق نفسها تبقى صحيحة عند $a = 1$ ، إذ تعطي مشتقّاً معدوماً؛ الذي يسقط هو النتيجة عن الرتابة، لا الصيغة. والكتاب يضع الشرط في المقدّمة ولا يقول ذلك.

12. ب نعم، والبرهان سطر: $a^x = e^{x \ln a} = e^{(-x)\ln \frac{1}{a}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$. فالارتفاع نفسه يظهر عند الفاصلة المعاكسة، وهذا هو التناظر بالنسبة إلى محور التراتيب.