

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: التكامل المحدد وخواصه

التكامل والتوابع الأصلية . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. ليكن F تابعاً أصلياً للتابع المستمر f على مجالٍ يحوي a و b . ما هو $\int_a^b f(x) dx$ بالتعريف؟

(أ) $F(a) - F(b)$

(ب) عددٌ يتغير بتغير التابع الأصلي F المختار

(ج) $F(b) - F(a)$

2. ما العلاقة بين $\int_0^1 x^2 dx$ و $\int_0^1 t^2 dt$ ؟

(أ) مختلفان، لأنّ المتحولين مختلفان

(ب) الثاني يساوي الأول مضروباً بـ t

(ج) متساويان تماماً

3. ما قيمة $\int_0^2 \frac{2}{x-3} dx$ ؟

(أ) $-2 \ln 3$

(ب) $2 \ln 3$

(ج) غير معرف، لأنّ $\ln(x-3)$ غير معرفٍ على $[0, 2]$ **4.** علمنا أنّ $\int_1^6 f = 12$. ما قيمة $\int_6^1 f$ ؟

(أ) 12

(ب) -12

(ج) $\frac{1}{12}$

5. بعلاقة شال، ما هو $\int_0^5 f$ بدلالة تكاملات أخرى؟

(أ) $\int_0^2 f \times \int_2^5 f$

(ب) $\int_0^2 f + \int_2^5 f$

(ج) $\int_0^2 f - \int_2^5 f$

6. ما قيمة $\int_0^2 |x^2 - 1| dx$ ؟

(أ) $\frac{4}{3}$

(ب) 2

(ج) $\frac{2}{3}$

7. لحساب $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ بالتجزئة، أيّ العاملين نجعله u ، أي الذي يُشتقّ؟

(أ) العامل x

(ب) العامل $\sin x$

(ج) أيّهما، فالنتيجة واحدة

8. ما صيغة التكامل بالتجزئة؟

(أ) $\int_a^b u v' = [u v]_a^b + \int_a^b u' v$

(ب) $\int_a^b u v' = [u v]_a^b - \int_a^b u' v$

(ج) $\int_a^b u v' = [u' v]_a^b - \int_a^b u v'$

9. نكتب $1 = \lambda(x + 1) + \mu(x - 2)$ لتفكيك $\frac{1}{(x + 1)(x - 2)}$. بالتعويض $x = -1$ ، أيّ ثابت نحصل عليه؟

(أ) نحصل على $\mu = -\frac{1}{3}$

(ب) نحصل على $\lambda = -\frac{1}{3}$

(ج) لا نحصل على شيء، لأنّ المقام ينعدم عند -1

10. أردنا حساب $\int_3^4 \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} \, dx$. ما الخطوة الأولى؟

(أ) تعيين λ و μ من $x^2 + 1 = \lambda(x + 1) + \mu(x - 2)$

(ب) كتابة الجواب مباشرة $\ln(x^2 - x - 2)$

(ج) قسمة إقليديّة للبسط على المقام

11. كيف نجد تابعاً أصلياً للتابع $f : x \mapsto \frac{2x - 1}{(x + 2)^2}$ على $]-\infty, -2[$ ؟

(أ) بوضع $2x - 1 = \lambda(x + 2) + \mu(x + 2)$ وتعيين الثابتين

(ب) لا يمكن، فالحالة خارج ما درسناه

(ج) بكتابة $2x - 1 = 2(x + 2) - 5$ ، فيصير $f(x) = \frac{2}{x + 2} - \frac{5}{(x + 2)^2}$

12. ما قيمة $\int_7^7 f$ لتابع f مستمرّ كيفما كان؟

(أ) 0

(ب) $f(7)$

(ج) غير معرّف، لأنّ الحديين متساويان

سَلَم التصحيح

1. ج نعم، وهو ما يُختصر بالرمز $[F(x)]_a^b$. لا مساحة ولا مجموع في التعريف، فرّق قيمتين فقط.
2. ج نعم، وهذا معنى أنّ المتحوّل مقيّد. ولهذا يسمح الكتاب بالكتابة المختصرة $\int_0^1 f$ عند عدم الحاجة إلى الصيغة.
3. أ نعم. على $[0, 2]$ يكون $x - 3 < 0$ ، فالفرع هو $2 \ln(3 - x)$ ، والتعويض يعطي $2 \ln 1 - 2 \ln 3$.
4. ب نعم. وهذه الخاصّة هي الوحيدة في الدرس التي لا يبرهنها الكتاب ولا يطبقها في مثال، مع أنّها تُستعمل كثيراً.
5. ب نعم. والعدد 2 ليس ملزماً بأن يقع بين الحدّين: المبرهنة تطلب فقط أن يكون من المجال.
6. ب نعم. الصفر الداخلي هو 1 ، فنقطع عنده بعلاقة شال، ثمّ نحسب كلّ قطعةٍ وحدها: $\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2$.
7. أ نعم. اشتقاق x يعطي 1 فيختفي كثير الحدود من التكامل الجديد، ومكاملة $\sin x$ تعطي $-\cos x$ وهي بالصعوبة نفسها.
8. ب نعم. ولاحظ حركة الشرطة: كانت على v فصارت على u . البرهان كلّهُ هو قاعدة اشتقاق الجداء مقروءةً بالمقلوب، مع المبرهنة 5 .
9. أ نعم، والتبادل هو المفاجأة: التعويض بصفر القوس الأوّل يُلغي λ ويترك μ . فيبقى $1 = \mu(-1 - 2)$.
10. ج نعم، الدرجتان متساويتان فالقسمة أوّلًا: $x^2 + 1 = (x^2 - x - 2) + x + 3$. ثمّ يعود الباقي $\frac{x+3}{x^2-x-2}$ إلى الحالة الأولى.
11. ج نعم، والحدّان سطران جاهزان من الدرس السابق: $\frac{u'}{u}$ و $u'u^n$ مع $n = -2$. فالجواب $2 \ln(-x-2) + \frac{5}{x+2}$ ، والفرع المأخوذ هو $\ln(-u)$ لأنّ $x+2 < 0$ هناك.
12. أ نعم، ولا حاجة إلى معرفة f . بالتعريف هو $F(7) - F(7)$. والكتاب لا يكتب هذه النتيجة في أي سطرٍ من هذا الدرس، مع أنّها تخرج من الخاصّة ③ بوضع $b = a$.