الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: التوابع الأصليّة

التكامل والتوابع الأصليّة . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. لكي نثبت أنّ F تابعٌ أصليّ للتابع f على المجال I ، ممّ نتحقّق؟

أ) من أنّ f مستمرٌّ على I

ب) من أنّ $F(x) = f'(x)$ عند كلّ x من I

ج) من أنّ F اشتقاقيّ على I ، وأنّ $F'(x) = f(x)$ عند كلّ x من I

2. وجدنا تابعاً أصليّاً F للتابع f على مجال I . كم تابعاً أصليّاً للتابع f على I يوجد؟

أ) عددٌ غير منتهٍ منها، وتختلف عن F بثابتٍ حقيقيّ لا أكثر

ب) واحدٌ فقط، وهو الذي وجدناه

ج) عددٌ غير منتهٍ منها، ويمكن أن يكون الفرق بين اثنين منها أيّ تابعٍ يُشاء

3. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على المجال $]-\infty, 0[$ هو:

أ) $\ln x$

ب) $\ln(-x)$

ج) $-\ln x$

4. ليكن F تابعاً أصليّاً للتابع f على المجال I ، ولتكن x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$. كم تابعاً أصليّاً G للتابع f على I يحقّق $G(x_0) = y_0$ ؟

أ) واحدٌ وحيد

ب) عائلةٌ كاملة، لأنّ الثابت يبقى حرّاً

ج) لا يوجد إلّا إذا صادف أنّ $y_0 = F(x_0)$

5. التابع الأصليّ للتابع $f : x \mapsto 3x^2 - x + 1$ على $\mathbb{R}$ الذي ينعدم عند $x = 1$ هو:

أ) $x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x$

ب) $x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{3}{2}$

ج) $x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + x - \dfrac{3}{2}$

6. لماذا يشترط التعريف والمبرهنتان أن تكون I مجالاً، لا مجموعةً كيفما كانت؟

أ) لأنّ الاشتقاق لا يُعرَّف إلّا على مجال

ب) لأنّ برهان المبرهنة ① يستعمل أنّ تابعاً معدوم المشتقّ يكون ثابتاً، وهذا لا يصحّ إلّا على مجال

ج) لأنّ التوابع المستمرّة لا تُعرَّف إلّا على مجالات

7. علمنا أنّ للتابع f تابعاً أصليّاً على المجال I . ماذا نستنتج عن استمرار f ؟

أ) هو مستمرٌّ حتماً على I

ب) لا شيء: قد يكون مستمرّاً وقد لا يكون

ج) هو غير مستمرٍّ حتماً على I

8. التابع f مستمرٌّ على المجال I . ما الذي تعطيه المبرهنة 2 بالضبط؟

أ) صيغةً صريحة للتابع الأصليّ

ب) طريقةً لحساب التابع الأصليّ خطوةً خطوة

ج) ضمانَ الوجود وحده، بلا صيغةٍ وبلا طريقة

9. أيكون $F : x \mapsto x\cos x$ تابعاً أصليّاً للتابع $f : x \mapsto \cos x - x\sin x$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) نعم، لأنّ $F'(x) = \cos x - x\sin x$

ب) لا، لأنّ $F'(x) = \cos x + x\sin x$

ج) لا، لأنّ $F'(x) = -x\sin x$

10. على أيّ مجالٍ يكون $F : x \mapsto \ln(\ln x)$ تابعاً أصليّاً للتابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$ ؟

أ) على $]0, +\infty[$

ب) على $]1, +\infty[$

ج) على $]0, 1[\cup]1, +\infty[$

11. على المجال $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ نأخذ $F(x) = \tan^2 x$ و $G(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. أهما تابعان أصليّان للتابع نفسه؟

أ) نعم، لأنّ $G - F = 1$ ، وهو ثابت

ب) لا، لأنّ صيغتيهما مختلفتان

ج) لا، لأنّ G غير معرّفٍ عند 0

12. على $\mathbb{R}$ نأخذ $F(x) = \sin 3x - 2\sin x$ و $G(x) = \sin x - 3\sin^3 x$. أهما تابعان أصليّان للتابع نفسه؟

أ) نعم، لأنّ مشتقّيهما متساويان عند $x = 0$

ب) نعم، لأنّ كليهما مبنيٌّ على الجيب وحده

ج) لا، لأنّ $F - G = -\sin^3 x$ ، وهو ليس ثابتاً

سلّم التصحيح

1. ج نعم، شرطان لا ثالث لهما، وكلاهما على F . وهذا حرفيّاً ما يجيب عنه الكتاب في الصفحة 201 .

2. أ نعم. المبرهنة 1 تقول الاتّجاهين معاً: كلّ $F+k$ تابعٌ أصليّ، وكلّ تابعٍ أصليّ من هذه الصيغة.

3. ب نعم. عند $x<0$ يكون $-x$ موجباً، والاشتقاق يعطي $\dfrac{-1}{-x}=\dfrac{1}{x}$ ، فالإشارتان تختصران.

4. أ نعم، وهذا نصّ المبرهنة 1 ③. السبب في سطر: كلّ تابعٍ أصليّ هو $F+k$ ، والشرط معادلةٌ من الدرجة الأولى في k ، فلها حلٌّ واحد.

5. ج نعم. الاشتقاق يعيد $3x^2-x+1$ ، والتعويض بـ 1 يعطي $1-\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{3}{2}=0$. الشرطان محقّقان.

6. ب نعم، وهذه هي الخطوة التي لا يسمّيها الكتاب. على $\mathbb{R}^*$ يمكن أن يكون الفرق 0 على اليسار و 1 على اليمين: مشتقّه معدوم وهو ليس ثابتاً.

7. ب نعم. المبرهنة 2 تسير في اتّجاهٍ واحد: من الاستمرار إلى الوجود. الطريق الآخر مفتوحٌ في الحالتين.

8. ج نعم، وهذا هو معنى «مبرهنة وجود». تفيدك حين تسأل هل البحث مجدٍ، ولا تفيدك في البحث نفسه.

9. أ نعم. بقاعدة الجداء $F'(x)=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)$. التحقّق كلّه سطرٌ واحد، وهذا كلّ ما يطلبه هذا الدرس.

10. ب نعم. الشرط $\ln x>0$ يكافئ $x>1$. وهناك $F'(x)=\dfrac{1}{\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$ ، وهو المطلوب.

11. أ نعم. $\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}=\dfrac{1-\sin^2 x}{\cos^2 x}=1$. وثبات الفرق على مجالٍ يكافئ تساوي المشتقّين، بالمبرهنة 1 .

12. ج نعم. بالدستور $\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x$ يصير $F=\sin x-4\sin^3 x$ ، فالفرق $-\sin^3 x$. وهو 0 عند $x=0$ و -1 عند $x=\dfrac{\pi}{2}$.

التوابع الأصليّة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 199 إلى 202 . basita123.com