الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: بعض قواعد حساب التوابع الأصليّة

التكامل والتوابع الأصليّة . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto x^5$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) $\dfrac{x^6}{6}$

ب) $5x^4$

ج) $\dfrac{x^6}{5}$

2. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ على المجال $]-\infty, 0[$ هو:

أ) $\ln x$

ب) $-\ln x$

ج) $\ln(-x)$

3. لماذا لا يعطي سطر القوى تابعاً أصليّاً للتابع $x \mapsto x^{-1}$ ؟

أ) لأنّ الأُسّ سالب، وسطر القوى للأُسس الموجبة وحدها

ب) لأنّ المقام $n+1$ يصير صفراً عند $n=-1$

ج) لأنّ x^{-1} غير معرّفٍ عند الصفر

4. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \sqrt{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ هو:

أ) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

ب) $\dfrac{2}{3}\,x\sqrt{x}$

ج) $2x\sqrt{x}$

5. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto e^{-3x}$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) $-\dfrac{1}{3}\,e^{-3x}$

ب) e^{-3x}

ج) $-3\,e^{-3x}$

6. على أيّ مجالٍ يعطي الجدول $F : x \mapsto \tan x$ تابعاً أصليّاً للتابع $f : x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ؟

أ) على $\mathbb{R}$ كلّها

ب) على $]0, +\infty[$

ج) على كلّ مجالٍ من الشكل $\left]-\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$

7. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto 3x^2\left(x^3+1\right)^4$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) $\dfrac{\left(x^3+1\right)^5}{4}$

ب) $x^3\left(x^3+1\right)^5$

ج) $\dfrac{\left(x^3+1\right)^5}{5}$

8. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \dfrac{2x}{x^2+1}$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) $\ln\left(x^2+1\right)$

ب) $\dfrac{x^2}{\ln\left(x^2+1\right)}$

ج) $\ln(2x)$

9. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto x\,e^{x^2}$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) e^{x^2}

ب) $\dfrac{1}{2}\,e^{x^2}$

ج) $\dfrac{x^2}{2}\,e^{x^2}$

10. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto 2x\,\sin\left(x^2\right)$ على $\mathbb{R}$ هو:

أ) $\cos\left(x^2\right)$

ب) $-\dfrac{\cos\left(x^2\right)}{2}$

ج) $-\cos\left(x^2\right)$

11. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$ على المجال $]1,+\infty[$ هو:

أ) $2\sqrt{x^2-x}$

ب) $\sqrt{x^2-x}$

ج) $\ln\left(x^2-x\right)$

12. تابعٌ أصليّ للتابع $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$ على المجال $]-\infty,2[$ هو:

أ) $\ln(2-x)$

ب) $x+3\ln(2-x)$

ج) $x+3\ln(x-2)$

سلّم التصحيح

1. أ نعم. نرفع الأُسّ واحداً ونقسم على الأُسّ الجديد. والتحقّق فوريّ: مشتقّ $\frac{x^6}{6}$ هو $\frac{6x^5}{6} = x^5$.

2. ج نعم. على $]-\infty, 0[$ يكون $-x$ موجباً تماماً، والاشتقاق يعطي $\frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

3. ب نعم، وهذا هو السبب الوحيد. القسمة على صفرٍ ممنوعة، ولذلك خُصّ هذا التابع بسطرٍ مستقلّ هو سطر اللوغاريتم.

4. ب نعم. نكتب $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ ونطبّق سطر الأُسّ الحقيقيّ: $\frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}x^{3/2} = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$. والمجال $]0, +\infty[$ هو بالضبط ما يشترطه ذلك السطر.

5. أ نعم. هذا السطر $g(ax+b)$ مع $a = -3$ ، فنقسم على a . والتحقّق: مشتقّ جوابك هو $-\frac{1}{3} \times (-3)e^{-3x} = e^{-3x}$.

6. ج نعم، وهي عائلة مجالاتٍ لا مجالٌ واحد. لاحظ الشرط الذي في الدرس الأوّل: I يجب أن يكون مجالاً، فلا يجوز جمع فرعين في واحد.

7. ج نعم. نضع $u(x) = x^3 + 1$ فيكون $u'(x) = 3x^2$ ، والتابع هو $u'u^4$ تماماً، من دون حاجةٍ إلى ضبط معامل.

8. أ نعم. البسط $2x$ هو مشتقّ المقام بالضبط، فالنمط $\frac{u'}{u}$. والمقام موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ ، فالفرع هو $\ln u$.

9. ب نعم. نضع $u(x) = x^2$ فيكون $u'(x) = 2x$ ، ونكتب $f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$. الضبط بعددٍ ثابت مسموح.

10. ج نعم. مع $u(x) = x^2$ يكون $u'(x) = 2x$ ، والتابع هو $u' \sin u$ تماماً، وتابعه الأصليّ $-\cos u$.

11. أ نعم. مع $u(x) = x^2 - x$ يكون $u'(x) = 2x - 1$ ، فالنمط $\frac{u'}{\sqrt{u}}$. والشرط $u > 0$ محقّقٌ على $]1, +\infty[$ لأنّ $u(x) = x(x-1)$.

12. ب نعم. القسمة تعطي $f(x) = 1 + \frac{3}{x-2}$. والمقام سالبٌ على $]-\infty, 2[$ ، فالفرع المأخوذ هو $\ln(-u)$ أي $\ln(2-x)$.

بعض قواعد حساب التوابع الأصليّة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 203 إلى 207 . basita123.com