الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: مبرهنات المقارنة

التوابع: النهايات والاستمرار . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. على المجال $]1,+\infty[$ لدينا $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ، مع $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ و $\lim_{x\to+\infty} h(x) = 3$. ماذا نستنتج؟

أ) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

ج) لا نستنتج شيئاً عن نهاية f

2. ما نهاية هذا التابع عند $+\infty$ ؟

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

أ) 1

ب) لا وجود لها، لأنّ $\sin x$ متأرجح

ج) 0

3. ما نهاية هذا التابع عند $+\infty$ ؟

$$f(x) = x + \cos x$$

أ) $+\infty$

ب) لا وجود لها، لأنّ $\cos x$ لا نهاية له

ج) 1

4. عند كلّ $x \ge 0$ لدينا $|f(x) - 3| \le \frac{1}{x+1}$. ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

أ) 0

ب) 3

ج) 4

5. عند كلّ $x < 0$ لدينا $f(x) \ge \frac{1}{4}x^2$. ما نهاية f عند $-\infty$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) $-\infty$

6. على مجال $]b,+\infty[$ لدينا $f(x)\leq g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. ماذا نستنتج عن f ؟

أ) لا نستنتج شيئاً

ب) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ج) نهاية f منتهية

7. حيث E تابع الجزء الصحيح، ما نهاية هذا التابع عند $+\infty$ ؟

$$f(x)=\frac{E(x)}{x}$$

أ) 0

ب) 1

ج) $+\infty$

8. ما نهاية هذا التابع عند الصفر؟

$$f(x)=x\sin\frac{1}{x}$$

أ) 1

ب) لا وجود لها، لأنّ $\sin\frac{1}{x}$ يتأرجح بلا توقّف

ج) 0

9. ما الأداة الصحيحة لحساب نهاية $x\sin\frac{1}{x}$ عند الصفر؟

أ) قاعدة نهاية الجداء

ب) الحصر $|f(x)-0|\leq|x|$ ثمّ المبرهنة 2

ج) التعويض المباشر بـ $x=0$

10. انطلاقاً من $-1\leq\sin x\leq 1$ ، أيّ متراجحة صحيحة أيّاً كان x الحقيقي؟

أ) $x^2-5\sin x\geq x^2+5$

ب) $x^2-5\sin x\geq x^2-5$

ج) $x^2-5\sin x\leq x^2-5$

11. عند كلّ $x>1$ لدينا $\frac{3x+\cos x}{x}\leq f(x)\leq\frac{3x+7}{x-1}$. ما نهاية f عند $+\infty$ ؟

أ) 3

ب) 7

ج) $+\infty$

12. أيّاً كان $x>0$ لدينا $\frac{1}{x}>0$. ماذا نستنتج عن $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ ؟

أ) أنّها موجبة تماماً

ب) أنّها غير موجودة، لأنّ القيم لا تبلغ 0

ج) أنّها ≥ 0 ، وهي هنا تساوي 0

13. أردنا تطبيق مبرهنة الإحاطة على نهاية عند عدد حقيقي a من الجهتين. أين يجب أن تتحقّق المتراجحة؟

أ) على مجال من النمط $]b, +\infty[$ حصراً

ب) عند النقطة a نفسها

ج) على مجموعة من النمط $]A, B[\setminus \{a\}$

14. المتراجحة $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ تكافئ أيّاً ممّا يلي؟

أ) $\ell - g(x) \leq f(x) \leq \ell + g(x)$

ب) $f(x) \leq \ell + g(x)$

ج) $f(x) - \ell \leq g(x) \ \wedge \ g(x) \leq 0$

15. من الحصر $\frac{x}{2} - 2 \leq f(x) \leq \frac{x}{2} + 2$ ، ما الحصر الصحيح لـ $f(1000)$ ؟

أ) $498 \leq f(1000) \leq 502$

ب) $498 \leq f(10000) \leq 502$

ج) $f(1000) = 500$

16. انطلاقاً من $-1 \leq \cos x \leq 1$ ، ما الحصر الصحيح لهذا التابع؟

$$f(x) = \frac{1}{3 + \cos x}$$

أ) $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

ب) $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}$

ج) $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$

سلّم التصحيح

1. ج صحيح. شرط المبرهنة 1 هو تساوي نهايتي الحاصرتين. مع 1 و 3 نعرف فقط أنّ القيم تقع في شريط، لا أنّ لها نهاية.

2. ج صحيح. الحاصرتان $-\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{x}$ نهايتهما 0 ، فمبرهنة الإحاطة تعطي 0 .

3. أ صحيح. من $\cos x \geq -1$ نجد $f(x) \geq x - 1$ ، ونهاية $x - 1$ هي $+\infty$ ، فالمبرهنة 3 تكفي بحاصرة واحدة.

4. ب صحيح. هذه صيغة المبرهنة 2 بالحرف: مسافة مضبوطة بحاصرة نهايتها 0 ، فالنهاية هي العدد 3 .

5. ب صحيح. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{4}x^2 = +\infty$ ، والتابع فوقها، فالمبرهنة 3 تعطي $+\infty$.

6. أ صحيح. الاتّجاه معكوس: سقفٌ يصعد لا يرفع ما تحته. المبرهنة 3 تطلب $f \geq g$ مع $\lim g = +\infty$.

7. ب صحيح. من $x - 1 < E(x) \leq x$ والقسمة على x الموجب نجد حصراً بين تابعين نهايتهما 1 .

8. ج صحيح. $|f(x) - 0| \leq |x|$ ونهاية $|x|$ عند الصفر هي 0 ، فالمبرهنة 2 تحسم.

9. ب صحيح. نستعمل محدوديّة الجيب وحدها، ونضبط المسافة إلى 0 بحاصرة نهايتها 0 .

10. ب صحيح. من $\sin x \leq 1$ نجد $-5\sin x \geq -5$ ، ثمّ نضيف x^2 إلى الطرفين.

11. أ صحيح. الحاصرة السفلى تساوي $3 + \frac{\cos x}{x}$ ونهايتها 3 ، والحاصرة العليا نهايتها 3 أيضاً، فالإحاطة تعطي 3 .

12. ج صحيح. المرور إلى النهاية يحفظ $\leq$ ولا يحفظ $<$. النتيجة الصحيحة هي $\ell \geq 0$ ، والحساب يعطي 0 .

13. ج صحيح. جوار مثقوب حول a . ومن جهة واحدة يكفي $]a, B[$ أو $]A, a[$.

14. أ صحيح. وهذه هي خطوة البرهان كلّها: تصير المسألة إحاطةً بحاصرتين نهايتهما ℓ .

15. أ صحيح. نعوّض 1000 في الحاصرتين: $500 - 2$ و $500 + 2$. الخطأ لا يتجاوز 2 في الاتّجاهين.

16. ج صحيح. من $2 \leq 3 + \cos x \leq 4$ وبأخذ المقلوب مع قلب الاتّجاه نجد $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ ، فالتابع محدود.

مبرهنات المقارنة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 33 إلى 36 . basita123.com