

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: الاستمرار

التوابع: النهايات والاستمرار . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. متى نقول إنَّ التابع f مستمر عند النقطة a من مجموعة تعريفه؟(أ) حين يكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (ب) حين يكون $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ (ج) حين يكون f معرفاً عند a **2.** التابع f معرف بـ $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ من أجل $x \neq 1$ ، وبـ $f(1) = 3$. هل f مستمر عند 1؟(أ) لا، لأنَّ النهاية عند 1 هي 2 وهي تخالف $f(1)$

(ب) نعم، لأنَّ التابع معرف عند 1 وله نهاية عندها

(ج) لا، لأنَّ التابع غير معرف عند 1

3. هل التابع $x \mapsto \sqrt{x}$ اشتقاقي عند الصفر؟

(أ) نعم، لأنَّه مستمر عند الصفر

(ب) لا، لأنَّ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = +\infty$

(ج) لا، لأنَّه غير مستمر عند الصفر

4. ما القول الصحيح عن استمرار التابع $x \mapsto \frac{1}{x-2}$ ؟

(أ) غير مستمر عند 2

(ب) مستمر على $\mathbb{R}$ (ج) مستمر على مجموعة تعريفه، أي على $]-\infty, 2[$ وعلى $]2, +\infty[$ **5.** التابع g يحقق $\lim_{x \rightarrow 3, x < 3} g(x) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 3, x > 3} g(x) = 2$ و $g(3) = 1$. هل g

مستمر عند 3؟

(أ) نعم، لأنَّ النهاية من اليسار تساوي $g(3)$ (ب) لا يمكن الحكم قبل معرفة $g'(3)$

(ج) لا، لأنَّه لا نهاية له عند 3

6. على أي مجموعة يكون التابع $P: x \mapsto x^3 - 2x + 7$ مستمراً؟(أ) على $[0, +\infty[$ (ب) على $\mathbb{R}$ (ج) على $\mathbb{R}$ ما عدا جذوره

7. على أي مجموعة يكون التابع $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ مستمراً؟

(أ) على $[-5, -1]$

(ب) على $[0, +\infty[$ وحده

(ج) على $\mathbb{R}$ ، لأن $(x + 2)^2 + 1 > 0$ دائماً

8. ماذا تقول مبرهنة 5 بالضبط عن العلاقة بين الاشتقاق والاستمرار؟

(أ) الاستمرار عند نقطة يعطي الاشتقاق عندها

(ب) الاستمرار والاشتقاق متكافئان

(ج) الاشتقاق عند نقطة يعطي الاستمرار عندها

9. ما وصف التابع $|x| \mapsto x$ عند الصفر؟

(أ) مستمر وغير اشتقائي

(ب) مستمر واشتقائي

(ج) غير مستمر وغير اشتقائي

10. لماذا يكون التابع $x \mapsto \sin x + \cos x$ مستمراً على $\mathbb{R}$ ؟

(أ) ليس مستمراً، لأن الجيب متأرجح

(ب) لأنه مجموع تابعين مستمرين على $\mathbb{R}$

(ج) لأنه دوري، وكل تابع دوري مستمر

11. التابعان u و v مستمران عند a ، و $v(a) = 0$. ماذا نقول عن $\frac{u}{v}$ عند a ؟

(أ) لا يُسأل عن استمراره عند a ، فهو غير معرف هناك

(ب) مستمر عند a ، لأن البسط والمقام مستمران

(ج) مستمر عند a إذا كان $u(a) = 0$ أيضاً

12. التابع u مستمر على $\mathbb{R}$ والتابع h مستمر على $\mathbb{R}$. ماذا نقول عن $x \mapsto h(u(x))$ ؟

(أ) مستمر على $\mathbb{R}$

(ب) مستمر فقط عند النقاط التي يكون فيها $u(x) = x$

(ج) لا يمكن الحكم قبل معرفة صيغتي التابعين

13. كيف نبرهن أن تابعاً مستمراً عند نقطة a ؟

(أ) نرسم خطه البياني ونرى أنه قطعة واحدة

(ب) نحسب $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ونقارنها بـ $f(a)$

(ج) نتحقق من كونه اشتقاقياً، وإن لم يكن اشتقاقياً فهو غير مستمر

14. ما مجموعة تعريف التابع $x \mapsto \sqrt{1 - \cos x}$ ؟

(أ) $\mathbb{R}$ ، لأن $\cos x \leq 1$ دائماً

(ب) $[0, +\infty[$

(ج) الأعداد $x = 2k\pi$ وحدها

15. نعلم أنّ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4$ وأنّ $f(1) = 4$. ما الحكم؟

(أ) f اشتقاقي عند 1

(ب) المعطيات لا تكفي للحكم على الاستمرار

(ج) f مستمرّ عند 1

16. التابع $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ معرّف من أجل $x \neq 2$. بأيّ قيمة نعرّفه عند 2 ليصير مستمرّاً عندها؟

(أ) بأيّ قيمة نختارها، فالاستمرار مسألة تعريف

(ب) بالقيمة 4 ، وهي نهاية التابع عند 2

(ج) لا يمكن، لأنّ المقام ينعدم عند 2

سَلَم التصحيح

1. أ صحيح. هذا نص التعريف حرفياً: النهاية عند النقطة هي قيمة التابع عندها.
2. أ صحيح. باختصار $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ من أجل $x \neq 1$ ، فالنهاية 2 ، والقيمة المعطاة 3 . لا تساوي، فلا استمرار.
3. ب صحيح. معدّل التغيّر هو $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ، ونهايته غير منتهية، فلا اشتقاق. والمماس في المبدأ شاقولي.
4. ج صحيح. تابع كسري مستمرّ على مجموعة تعريفه كلّها، والصياغة الصحيحة تذكر المجموعة ولا تدّعي شيئاً عند 2 .
5. ج صحيح. النهايتان 1 و 2 مختلفتان، فلا نهاية عند 3 ، والخطّ البياني ينفصل هناك إلى قطعتين.
6. ب صحيح. توابع كثيرات الحدود اشتقاقية على $\mathbb{R}$ ، فهي مستمرّة عليها بحسب مبرهنة 5.
7. ج صحيح. ما تحت الجذر موجب تماماً على $\mathbb{R}$ ، والتابع مركّب من كثير حدود ومن الجذر، وكلاهما مستمرّ.
8. ج صحيح، وهذا اتّجاه واحد فقط. البرهان يمرّ بـ $f(x) - f(a) = (x - a)g(x)$ حيث g له نهاية منتهية هي $f'(a)$.
9. أ صحيح، وهذا أحد المثالين اللذين يذكرهما الكتاب في تنبيهاته: الاستمرار عند نقطة لا يعني قابلية الاشتقاق فيها.
10. ب صحيح. الاستمرار ينتقل عبر الجمع، والتابعان مرجعيّان كلاهما.
11. أ صحيح. شرط الكتاب في القسمة هو أن يكون الخارج معرّفاً عند النقطة المدروسة، وهو ساقط هنا.
12. أ صحيح. مركّب تابعين مستمرّين مستمرّ، وهذا يأتي مباشرة من خاصّة نهاية التابع المركّب.
13. ب صحيح، وهذا نص ما يوصي به الكتاب: لدراسة استمرار f عند a نحسب النهاية ونحسب القيمة.
14. أ صحيح. المقدار $1 - \cos x$ غير سالب مهما كانت x ، فلا قيد على x ، والتابع مستمرّ على $\mathbb{R}$ بوصفه مركّباً.
15. ج صحيح. الشروط الثلاثة محقّقة: القيمة موجودة، والنهاية موجودة، وهما متساويتان.
16. ب صحيح. باختصار $\frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$ من أجل $x \neq 2$ ، فالنهاية 4 ، وهي القيمة الوحيدة التي تجعل التابع مستمرّاً.