

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: التتابع المستمرة وحل المعادلات

التتابع: النهايات والاستمرار . 16 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. التابع f مستمر على $[0, 5]$ ، و $f(0) = -2$ و $f(5) = 6$. ماذا تعطي مبرهنة القيمة الوسطى عن المعادلة $f(x) = 0$ ؟

(أ) حللاً وحيداً في $[0, 5]$

(ب) لا شيء، لأنّ التابع غير مّطرد

(ج) حللاً واحداً على الأقلّ في $[0, 5]$

2. ما الذي يضمن وحدانيّة حلّ المعادلة $f(x) = k$ على مجال ؟

(أ) الاطراد التامّ للتابع على ذلك المجال

(ب) استمرار التابع على ذلك المجال

(ج) كون المجال مغلقاً

3. التابع f مستمرّ ومتزايد تماماً على $I = [1, 4]$ ، و $f(1) = -3$ و $f(4) = 5$. ما $f(I)$ ؟

(أ) $]-3, 5[$ (ب) $[1, 4]$ (ج) $[-3, 5]$

4. التابع f معرّف على $I = [-3, 2]$ وفق الصيغة الآتية. ما $f(I)$ ؟

$$f(x) = x^2 + 1$$

(أ) $[5, 10]$ (ب) $[1, 10]$ (ج) $[1, 5]$

5. التابع f معرّف ومستمرّ على مجموعة الأعداد الحقيقية، وجدول تغيّراته هو الآتي. كم عدد حلول المعادلة $f(x) = 0$ ؟

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	-2	4	3

(أ) 2

(ب) 3

(ج) 1

6. لماذا لا تكفي مبرهنة القيمة الوسطى وحدها لتحديد عدد الحلول؟

- (أ) لأنها تقول «يوجد على الأقل» ولا تقول «يوجد وحيد»
 (ب) لأنها تشترط أن يكون التابع قابلاً للاشتقاق
 (ج) لأنها لا تنطبق إلا على المجالات المفتوحة

7. التابع f مستمر ومتزايد تماماً على $I =]0, 3]$ ، ونهايته عند 0 هي $-\infty$ ، و $f(3) = 4$. ما $f(I)$ ؟

- (أ) $[f(0), 4]$
 (ب) $] -\infty, 4[$
 (ج) $] -\infty, 4]$

8. تابع معزف على $[1, 4]$ وغير مستمر، وله قفزة عند 2 . هل يكفي أن يكون k محصوراً بين قيمتي التابع عند الطرفين ليوجد حل للمعادلة $f(x) = k$ ؟

- (أ) لا، فبلا استمرار قد تقفز القيم فوق k دون أن تبلغه
 (ب) نعم، فالحصر بين القيمتين وحده يكفي
 (ج) نعم، إذا كان التابع مظرداً

9. التابع f مستمر ومظرد على $[0, 5]$ ، لكنه ليس مظرداً تماماً. ماذا يمكن أن تكون مجموعة حلول المعادلة $f(x) = 1$ ؟

- (أ) نقطة واحدة لا غير، دائماً
 (ب) قد تكون مجالاً كاملاً من القيم
 (ج) المجموعة الخالية، دائماً

10. التابع f مستمر ومظرد تماماً على $[2, 3]$ ، و $f(2) = -1$ و $f(3) = 8$. ماذا تستنتج عن المعادلة $f(x) = 0$ ؟

- (أ) لها حلان في $]2, 3[$
 (ب) لها حل وحيد في $]2, 3[$
 (ج) لا يمكن الاستنتاج قبل حساب المشتق

11. ما الذي تمثله حلول المعادلة $f(x) = k$ على الشكل؟

- (أ) تراتيب النقاط المشتركة بين C_f والمستقيم $y = k$
 (ب) فواصل النقاط المشتركة بين C_f ومحور الفواصل
 (ج) فواصل النقاط المشتركة بين C_f والمستقيم $y = k$

12. التابع f تقابل من I إلى J ، و g تقابله العكسي. أي العلاقات الآتية صحيحة أيّاً كان x من I ؟

- (أ) $g(f(x)) = f(x)$
 (ب) $g(x) = \frac{1}{f(x)}$
 (ج) $g(f(x)) = x$

13. الخطان البيانيان لتابع تقابل ولتقابله العكسي، في معلم متجانس، متناظران بالنسبة إلى أي مستقيم؟

- (أ) $y = x$
 (ب) $y = 0$
 (ج) $x = 0$

14. متى يكون التابع f تقابلاً من مجال I إلى $J = f(I)$ ؟

(أ) حين يكون مستمرّاً ومطردّاً تماماً على I

(ب) حين يكون مستمرّاً على I

(ج) حين يكون قابلاً للاشتقاق على I

15. التابع f معرّف على مجموعة الأعداد الحقيقية وفق الصيغة الآتية. لماذا للمعادلة $f(x) = 0$ حلّ وحيد في $[2, 3]$ ؟

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$$

(أ) لأنّ $f(2)$ و $f(3)$ مختلفتا الإشارة، وهذا وحده يكفي

(ب) لأنّ f مستمرّ ومتزايد تماماً على $[2, 3]$ ، ولأنّ $f(2) \times f(3) < 0$

(ج) لأنّ f كثير حدود من الدرجة الثالثة، ولكثيرات الحدود الفردية جذر واحد

16. التابع f مستمرّ على $[0, 4]$ ، و $f(0) = 2$ و $f(4) = 5$. هل يمكن أن يكون للمعادلة

$$f(x) = 0$$

(أ) لا، لأنّ قيمتي الطرفين موجبتان

(ب) نعم، فالمبرهنة لا تمنع ذلك

(ج) لا، لأنّ 0 ليس محصوراً بين 2 و 5

سَلَم التصحيح

1. ج صحيح. العدد 0 محصور بين -2 و 6 ، والتابع مستمر على المجال المغلق، فيوجد c واحد على الأقل يحقق $f(c) = 0$.
2. أ صحيح. الاطراد التام يمنع عددين مختلفين من أن تكون لهما الصورة نفسها، فالحل واحد على الأكثر.
3. ج صحيح. التابع مستمر ومتزايد تماماً على مجال مغلق، فالمبرهنة 7 تعطي $f(I) = [f(1), f(4)]$.
4. ب صحيح. القيمة الصغرى هي $f(0) = 1$ والقيمة العظمى هي $f(-3) = 10$ ، وصورة المجال المغلق وفق تابع مستمر هي $[m, M]$.
5. أ صحيح. صور مجالات الاطراد هي $[-2, +\infty[$ و $[-2, 4]$ و $]3, 4[$. العدد 0 ينتمي إلى الأولين ولا ينتمي إلى الثالث، فالحلول اثنان.
6. أ صحيح. الكتاب يضيف صراحة أن العدد c ليس وحيداً بالضرورة، ويرفق شكلاً فيه ثلاث نقاط تقاطع.
7. ج صحيح. المبرهنة 8 في حالة $I =]a, b]$ تعطي $f(I) =]\lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(3)]$.
8. أ صحيح. هذا مثال الكتاب نفسه: المعادلة $f(x) = 4$ لها حل، والمعادلة $f(x) = 2$ لا حل لها، والقفزة هي السبب.
9. ب صحيح. مثال الكتاب تابع مظهر غير مظهر تماماً، وكل قيم المجال $[2, 3]$ فيه حلول للمعادلة $f(x) = 1$.
10. ب صحيح. $f(2) \times f(3) < 0$ مع الاستمرار والاطراد التام، وهذه هي النتيجة المذكورة في الكتاب حرفاً بحرف.
11. ج صحيح. هذه هي القراءة الهندسية التي يفتح بها الكتاب الوحدة، وهي أساس عدّ الحلول كله.
12. ج صحيح. ومعها العلاقة المقابلة $f(g(y)) = y$ أيًا كان y من J . كل من التابعين يرد ما فعله الآخر.
13. أ صحيح. النقطتان $M(x, y)$ و $M'(y, x)$ متناظرتان بالنسبة إلى هذا المستقيم، والتقابل العكسي يبذل الفاصلة بالترتيب.
14. أ صحيح. الاستمرار يجعل J مجالاً ويضمن الوجود، والاطراد التام يضمن أن لكل y من J أصلاً واحداً فقط.
15. ب صحيح. $f(2) = -1$ و $f(3) = 8$ ، والتابع متزايد تماماً بعد $\frac{4}{3}$ ، فتتطبق النتيجة وتعطي حلاً وحيداً.
16. ب صحيح. مبرهنة القيمة الوسطى تعطي شرطاً كافياً للوجود لا شرطاً لازماً. حين لا تتبدل الإشارة بين الطرفين لا نستنتج شيئاً، لا الوجود ولا الانعدام.