الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: تقارب المتتاليات المطَّردة

نهاية متتالية . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

بسيطة

1. متتاليةٌ متناقصة ومحدودة من الأعلى. ماذا تعطي مبرهنة 8؟

أ) أنّها متقاربة

ب) لا شيء. الحدّ في الجهة الخطأ

ج) أنّها متباعدة إلى $-\infty$

2. ما نفي العبارة «المتتالية محدودة من الأعلى»؟

أ) كلّ الحدود أكبر من أيّ عددٍ نختاره

ب) مهما كبر العدد A وُجد حدٌّ u_N يحقّق $u_N > A$

ج) المتتالية محدودة من الأدنى

3. وجدتَ أنّ $M = 100$ عنصرٌ راجح على متتالية. هل $M = 1000$ عنصرٌ راجح أيضاً؟

أ) لا، العنصر الراجح وحيد

ب) فقط إذا كانت المتتالية متزايدة

ج) نعم، وكذلك كلّ عددٍ أكبر

4. المتتالية $u_n = n + (-1)^n n$. أيّ العبارتين صحيحة؟

أ) غير محدودة من الأعلى، ولا تسعى إلى $+\infty$

ب) غير محدودة من الأعلى، إذن تسعى إلى $+\infty$

ج) محدودة، لأنّ نصف حدودها صفر

5. المتتالية $u_n = 2n + (-1)^n n$ تسعى إلى $+\infty$. هل هي متزايدة؟

أ) نعم، وإلّا لما سعت إلى $+\infty$

ب) لا يمكن الحكم من دون حساب كلّ الحدود

ج) لا. تكبر في المجمل من دون ترتيب

6. لماذا يقول الكتاب عن مبرهنة 8 إنّه يقبلها دون إثبات؟

أ) لأنّ البرهان طويل ويُترك تمريناً

ب) لأنّها خاصّةٌ لمجموعة الأعداد الحقيقيّة نفسها

ج) لأنّها واضحةٌ من الرسم

7. مبرهنة 8 أعطتك أنّ المتتالية متقاربة. ماذا تعرف عن قيمة النهاية؟

أ) أنّها تساوي الحدّ الراجح الذي استعملتَه

ب) لا شيء بعد. المبرهنة تثبت الوجود فقط

ج) أنّها تساوي أوّل حدٍّ من حدود المتتالية

8. في التطبيق على $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ ، ما الترتيب الصحيح؟

أ) الشرطان أوّلاً، ثمّ المعادلة

ب) حلّ $f(x) = x$ أوّلاً، ثمّ تحقّق من الشرطين

ج) الترتيب لا يهمّ ما دامت النتيجة صحيحة

9. معادلة النقطة الصامدة $x^2 - x - 1 = 0$ لها جذران. أيّهما النهاية؟

أ) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ ، لأنّ الجذر الآخر سالب والنهاية موجبة

ب) الأكبر دائماً

ج) كلاهما، فالمتتالية لها نهايتان

10. أيّ الشرطين تحتاج القاعدة $\dfrac{a}{b} \le \dfrac{c}{d}$ على أعدادٍ موجبةٍ تماماً؟

أ) $a \le c$ و $b \le d$

ب) $a \le c$ وحده

ج) $a \le c$ و $b \ge d$

11. من $a \le b$ مع $ab > 0$ ، ماذا نستنتج عن المقلوبين؟

أ) $\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{1}{b}$

ب) $\dfrac{1}{a} \le \dfrac{1}{b}$

ج) لا شيء من دون معرفة الإشارتين بالتفصيل

12. لماذا لا تُذكر الحدّية من الأدنى في شرط المتتالية المتزايدة؟

أ) لأنّها غير لازمة للتقارب

ب) لأنّ الكتاب أغفلها سهواً

ج) لأنّها متحقّقة دائماً بحدّها الأوّل

سلّم التصحيح

1. ب نعم. المتناقصة تُقرن بحدٍّ من الأدنى، وهو الذي يوقف النزول. المتناقصة محدودةٌ من الأعلى بحدّها الأوّل على أيّ حال، فالمعطى مجّانيّ.

2. ب نعم، وهذا نصّ الكتاب. شاهدٌ واحد لكلّ عدد يكفي، وهو بالضبط ما يستعمله برهان مبرهنة 7.

3. ج نعم. إذا كان $u_n \leq 100$ عند كلّ n فبالتأكيد $u_n \leq 1000$. الحدّ ليس وحيداً أبداً، والكتاب يقوله في ملاحظةٍ صريحة.

4. أ نعم، وهذا مثال الكتاب المضادّ. الحدود الزوجيّة $4n$ تكبر بلا حدّ، والفرديّة تساوي صفراً. خذ $A = 1$: المجال $]1, +\infty[$ يفوته عددٌ لا نهائيٌّ من الحدود، وهذا يكفي لهدم النهاية.

5. ج نعم، وهذه عبارة الكتاب: في تزايدٍ ولكن دون ترتيب. $u_4 = 12$ أكبر من $u_5 = 5$ ، ومع ذلك $u_n \geq n$ فتبلغ اللانهاية.

6. ب نعم، وهذا نصّ الكتاب: هذه خاصّة مهمّة من خواصّ مجموعة الأعداد الحقيقيّة، سنقبلها دون إثبات. ليست نتيجةً تُشتقّ ممّا سبقها.

7. ب نعم، والكتاب يقوله في ملاحظةٍ صريحة: لا تعطي هذه المبرهنة نهاية المتتالية، إنّها تثبت فقط وجود نهايةٍ حقيقيّة لها.

8. أ نعم. الاطّراد والحدّ يعطيان وجود ℓ ، وبعده فقط يجوز تمرير النهاية داخل التابع وحلّ $f(x) = x$.

9. أ نعم. $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ سالب، وكلّ حدود المتتالية موجبة، فالنهاية موجبة ولا يمكن أن تكون هو.

10. ج نعم. البسط يصغر والمقام يكبر، فالكسر كلّه يصغر. الاتّجاهان متعاكسان، وهذا ما يُنسى.

11. أ نعم، والشرط $ab > 0$ جزءٌ من القاعدة: لو كان a سالباً و b موجباً لانهار الاستنتاج.

12. ج نعم. المتزايدة لا تنزل تحت u_0 أبداً، فالحدّ من الأدنى مجّانيّ ولا يضيف معلومة. المفيد هو الحدّ الذي يوقف الصعود.

تقارب المتتاليات المطَّردة . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 110 إلى 114 . basita123.com