



الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

## ورقة تمارين: عموميّات عن المتتاليات

تذكرة بالمتتاليات، والإثبات بالتدريج . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. المتتالية  $(u_n)$  معرّفة بالحدّ العامّ  $u_n = \frac{1}{n^2 - 4}$  . ما أصغر دليلٍ ابتدائيّ صالح؟

(أ)  $n_0 = 3$ (ب)  $n_0 = 0$ (ج)  $n_0 = 2$ 

2. كم حدّاً للمتتالية  $u_n = (-1)^n$  ؟

(أ) حدّان اثنان، لأنّها لا تأخذ إلاّ القيمتين 1 و -1

(ب) لا يمكن تحديد العدد ما دام الدليل الابتدائيّ غير معطى

(ج) عددٌ لا نهائيّ من الحدود

3. متى يكون التعريف التدرجيّ  $u_{n+1} = f(u_n)$  مع  $u_0 \in D$  سليماً إلى ما لا نهاية؟

(أ) إذا كان  $f(x)$  عنصراً من  $D$  مهما يكن  $x$  من  $D$ (ب) إذا كان  $u_0$  عنصراً من  $D$ (ج) إذا كان  $f$  مظرداً على  $D$ 

4. المتتالية  $u_n = \frac{n^2 + 1}{2n}$  على  $n \geq 1$  . ما إشارة  $u_{n+1} - u_n$  ، ولماذا؟

(أ) موجبة، لأنّ كلّ حدود المتتالية موجبة

(ب) موجبة تماماً، لأنّ الفرق يساوي  $\frac{n^2 + n - 1}{2n(n+1)}$  والمقام موجب(ج) تتغيّر مع  $n$  ، فلا يمكن الحكم من دون تجربة قيم

5.  $v_n = (n - 1)^2$  . الكتاب يستنتج أنّ  $(v_n)_{n \geq 1}$  متزايدة تماماً. لماذا لا يكتب  $n \geq 0$  ؟

(أ) لأنّ  $v_0$  غير معرّف(ب) لأنّ  $f(x) = (x - 1)^2$  لا يتزايد إلاّ على  $[1, +\infty[$  ، وفعلاً  $v_0 > v_1$ 

(ج) لأنّ الدليل الابتدائيّ يُختار دائماً 1 في المتتاليات المعرّفة بتابع

6. متى تصلح أداة النسبة  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  لدراسة الاطراد؟

(أ) دائماً، ما دام  $u_n \neq 0$ 

(ب) إذا كانت المتتالية هندسيّة

(ج) إذا كانت حدود المتتالية موجبة تماماً

7. متتالية حسابيّة  $u_1 = -2$  وأساسها  $r = 3$  . كم يساوي  $u_{20}$  ؟

أ) 58

ب) 57

ج) 55

8. كم حدّاً في المجموع  $u_{25} + u_{26} + \dots + u_{125}$  ؟

أ) 100

ب) 125

ج) 101

9. لماذا تُكتب صيغة المجموع الهندسيّ بالشرط  $q \neq 1$  ؟

أ) لأنّ المتتالية عند  $q = 1$  لا تكون هندسيّة

ب) لأنّ المقام  $1 - q$  ينعدم، والمجموع عندئذٍ يساوي  $n \times a$

ج) لأنّ  $q^n$  لا تُعرّف عند  $q = 1$

10. في المطابقة  $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + \dots + a^{n-1})$  ، كم حدّاً في القوس الثاني عند  $n = 5$  ؟

أ) أربعة

ب) خمسة

ج) ستّة

11.  $a$  و  $b$  و  $c$  ثلاثة حدودٍ متوالية من متتالية هندسيّة أساسها  $q$  . أيّ العلاقات الآتية صحيحة؟

أ)  $b = aq$  ،  $c = aq^2$

ب)  $b = a + q$  ،  $c = b + q$

ج)  $b = aq$  ،  $c = bq^2$

12. في المتتالية  $u_0 = 3$  و  $u_{n+1} = u_n^2 - 2$  نجد  $u_1 = 7$  و  $u_2 = 47$  و  $u_3 = 2207$  ، وكلّها تنتهي بالرقم 7 . ماذا يمكن أن نستنتج؟

أ) أنّ المقولة مُرَجَّحة، ولا تُثبت إلّا بأداةٍ تشمل كلّ  $n$

ب) أنّ كلّ الحدود ذات الدليل الأكبر من 1 تنتهي بالرقم 7

ج) أنّ المقولة خاطئة، لأنّ ثلاث حالاتٍ لا تكفي

## سَلَم التصحيح

1. أ نعم. المقام ينعدم عند  $n = 2$  ، فأول دليلٍ طبيعيٍّ صالحٍ بعده هو 3 ، ولا ينعدم المقام بعده أبداً.
2. ج نعم، والكتاب يقول ذلك صراحةً: للمتتالية عددٌ لا نهائيٌّ من الحدود بقطع النظر عن قيم هذه الحدود.
3. أ نعم، وهذا مضمون إطار «بوجه عام» في الكتاب. من دونه قد تخرج المتتالية من مجالها بعد خطوةٍ أو خطوتين وتوقّف.
4. ب نعم. المقام موجبٌ تماماً عند  $n \geq 1$  ، فالإشارة إشارة البسط، و  $n^2 + n - 1 = n^2 + (n - 1)$  موجبٌ تماماً هناك.
5. ب نعم.  $f'(x) = 2(x - 1)$  موجبٌ عند  $x > 1$  فقط، و  $v_0 = 1$  أكبر من  $v_1 = 0$  . الأداة تنقل الاطراد على المجال الذي ثبت عليه وحده.
6. ج نعم، والكتاب يذكر الشرط في السطر نفسه. من دونه قد يخرج الجواب معكوساً تماماً.
7. ج نعم. بصيغة القفز  $u_{20} = u_1 + (20 - 1) \times 3 = -2 + 57 = 55$  . لاحظ 19 خطوة، لا 20 .
8. ج نعم،  $101 = 1 + 25 + 125$  . الطرفان محسوبان معاً، ولهذا يُزاد واحد.
9. ب نعم. الشرط يحمي القسمة، والحالة المستبعدة هي أسهل الحالات:  $n$  حدّاً متساوياً، فالمجموع  $n$  مضروباً بالحدّ.
10. ب نعم. الحدود هي كلّ  $x^\alpha a^\beta$  مع  $\alpha + \beta = 4$  ، وعددها  $n$  أي خمسة.
11. أ نعم، وهي صيغة القفز  $u_m = u_p q^{m-p}$  مطبّقةً بخطوةٍ ثمّ بخطوتين.
12. أ نعم. الاستقراء من حالاتٍ يعطي فرضيّة لا برهاناً. الفرق بين الاثنين هو موضوع الدرس التالي كلّهُ.

عموميّات عن المتتاليات . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 7 إلى 11 . basita123.com