الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: نهايات مهمّة تتعلّق بالتابع اللّوغاريتمي

التابع اللّوغاريتمي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. ما قيمة $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ ؟

أ) 1

ب) $+\infty$

ج) 0

2. ما قيمة $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} (x \ln x)$ ؟

أ) $-\infty$

ب) 0

ج) حالة عدم تعيين لا تُحسم

3. ما قيمة $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ ؟

أ) 1

ب) 0

ج) $+\infty$

4. ما قيمة $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\ln x}$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

5. ما قيمة $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\ln x}$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

6. ما قيمة $\lim\limits_{x \to 0,\ x>0} \left(\dfrac{1}{x} + \ln x\right)$ ؟

أ) $+\infty$

ب) $-\infty$

ج) 0

7. ما قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right)$ ؟

أ) $\ln 2$

ب) 0

ج) $+\infty$

8. ما قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

9. ما قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$ ؟

أ) 1

ب) 0

ج) $+\infty$

10. ما قيمة $\lim\limits_{x\to 0,\ x>0}\left(\left(x^2-x\right)\ln x\right)$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) $-\infty$

11. ما قيمة $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}$ ؟

أ) 0

ب) $+\infty$

ج) 1

12. عند حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln(2x+1)-\ln(x+2)\right)$ ، ما الخطوة الأولى الصحيحة؟

أ) حساب نهاية كلّ حدٍّ على حدة ثمّ الطرح

ب) إهمال الثابتين 1 و 2 لأنّهما صغيران أمام x

ج) ضمّ الفرق في لوغاريتمٍ واحد

سلّم التصحيح

1. ج نعم. اللوغاريتم يصغر أمام x ، ويُثبت ذلك بالحصر $0 < \dfrac{\ln x}{x} < \dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

2. ب نعم. الصفر يغلب هنا: يُبرهن ذلك بتغيير المتحوّل $u = \dfrac{1}{x}$ ، فيصير المقدار $-\dfrac{\ln u}{u}$.

3. أ نعم، وهي نسبة التغيّر للتابع $\ln$ عند الفاصلة 1 ، فقيمتها $\ln'(1) = 1$.

4. ب نعم، وهو مقلوب النهاية $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$. ومقلوب مقدارٍ يتلاشى بقيمٍ موجبة يكبر بلا حدّ.

5. ج نعم، وهو مقلوب $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} = 1$ ، وهذه الأخيرة نسبة التغيّر عند 1 .

6. أ نعم. نكتب المجموع كسراً واحداً $\dfrac{1 + x \ln x}{x}$ ، فالبسط يسعى إلى 1 والمقام يتلاشى بقيمٍ موجبة.

7. أ نعم. نضمّ الفرق في لوغاريتمٍ واحد $\ln \dfrac{2x + 1}{x + 2}$ ، والكسر يسعى إلى 2 ، واللوغاريتم مستمرّ هناك.

8. ج نعم. بوضع $u = \dfrac{1}{x}$ يصير المقدار $\dfrac{\ln(1 + u)}{u}$ مع $u \to 0$ ، وهذه هي النهاية الأولى من هذا الدرس.

9. ب نعم. اكتب الكسر جداءً: $\dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x}$ ، وكلا العاملين يتلاشى. والمقام هنا أسرع من الحالة الأساسيّة.

10. أ نعم. انشر الجداء: $x\,(x \ln x) - x \ln x$ ، وكلا الحدّين يسعى إلى الصفر بحكم المبرهنة.

11. ب نعم. حتّى الجذر التربيعيّ، وهو بطيء، أسرع من اللوغاريتم. وتراه بوضع $t = \sqrt{x}$ فيصير المقدار $\dfrac{t}{2 \ln t}$.

12. ج نعم. فرق اللوغاريتمين هو لوغاريتم الكسر، وبذلك تتحوّل حالة عدم التعيين إلى نهاية كسرٍ بسيطة.

نهايات مهمّة تتعلّق بالتابع اللّوغاريتمي . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 147 إلى 149 . basita123.com