الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: مشتقّ التابع المركّب ln∘u

التابع اللّوغاريتمي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

---

1. التابع u اشتقاقيٌّ وموجبٌ تماماً على I . ما مشتقّ $x \mapsto \ln(u(x))$ ؟

أ) $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

ب) $\dfrac{1}{u(x)}$

ج) $\dfrac{u(x)}{u'(x)}$

2. ما الشرط الذي يشترطه الكتاب على u قبل تطبيق قاعدة اشتقاق $\ln \circ u$ ؟

أ) أن يكون u موجباً أو معدوماً على I

ب) أن يكون u موجباً تماماً على I

ج) أن يكون u' موجباً تماماً على I

3. ما مشتقّ $f(x) = \ln(3x+5)$ على $\left]-\frac{5}{3}, +\infty\right[$ ؟

أ) $\dfrac{1}{3x+5}$

ب) $\dfrac{3}{x}$

ج) $\dfrac{3}{3x+5}$

4. ما مشتقّ $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) $\dfrac{1}{x^2+1}$

ب) $\dfrac{2x}{x^2+1}$

ج) $\dfrac{2x}{x^2}$

5. ما مشتقّ $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$ على $]2, +\infty[$ ؟

أ) $\dfrac{4}{x^2-4}$

ب) $\dfrac{1}{x^2-4}$

ج) $\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$

6. التابع u اشتقاقيٌّ وسالبٌ تماماً على I . ما مشتقّ $f(x) = \ln(-u(x))$ ؟

أ) $-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

ب) $\dfrac{-u'(x)}{u(x)}$

ج) $\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

7. لماذا لا يجوز القول إنّ $x \mapsto \ln\left(x^2-1\right)$ اشتقاقيٌّ على $\mathbb{R}$ ؟

أ) لأنّ x^2-1 ليس اشتقاقيّاً على $\mathbb{R}$

ب) لأنّ مشتقّه $\dfrac{2x}{x^2-1}$ غير معرّف عند $x=0$

ج) لأنّ x^2-1 ليس موجباً تماماً على $\mathbb{R}$

8. ما مشتقّ $f(x)=\ln(\cos x)$ على $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ ؟

أ) $-\tan x$

ب) $\tan x$

ج) $\dfrac{1}{\cos x}$

9. ما مشتقّ $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ على $]1,+\infty[$ ؟

أ) $\dfrac{x+1}{x-1}$

ب) $\dfrac{2}{x^2-1}$

ج) $\dfrac{2}{(x+1)^2}$

10. ما مشتقّ $f(x)=\ln(2x)$ على $]0,+\infty[$ ؟

أ) $\dfrac{2}{x}$

ب) $\dfrac{1}{2x}$

ج) $\dfrac{1}{x}$

11. ما مشتقّ $f(x)=\ln(\sqrt{x})$ على $]0,+\infty[$ ؟

أ) $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ب) $\dfrac{1}{2x}$

ج) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

12. التابع u اشتقاقيٌّ وموجبٌ تماماً على المجال I . على أيّ مجموعة يكون $\ln \circ u$ اشتقاقيّاً؟

أ) على I كلّها

ب) على I ما عدا أصفار u'

ج) على $I \cap]0, +\infty[$

سلّم التصحيح

1. أ نعم: مشتق الداخل على الداخل. وتحقّق بالحالة $u(x) = x$ فتعود الصيغة إلى $\frac{1}{x}$.

2. ب نعم، وهو الشرط الذي يطبعه الكتاب بلونٍ مختلف عن بقيّة السطر. من دونه لا وجود للتابع أصلاً.

3. ج نعم. مشتق الداخل هو 3، والمجال المعطى هو بالضبط ما يجعل $3x + 5 > 0$.

4. ب نعم. والداخل موجبٌ تماماً على $\mathbb{R}$ كلّها لأنّ المربّع لا يقلّ عن الصفر، فالشرط محقّق من دون استثناء.

5. أ نعم. المشتق هو $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2}$، وبتوحيد المقامين يصير $\frac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$.

6. ج نعم، وهذه هي المفاجأة: الإشارتان السالبتان تحذفان إحداهما الأخرى، فالصيغة لا تتغيّر عن الحالة الموجبة.

7. ج نعم. الشرط يسقط على المجال $[-1, 1]$، فالتابع غير معرّف هناك أصلاً. وهو اشتقاقيٌّ على كلّ مجالٍ جزئيّ يتجنّبه.

8. أ نعم. مشتق الداخل هو $-\sin x$، فالكسر $\frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$. والمجال المعطى هو ما يجعل $\cos x > 0$.

9. ب نعم. وأسرع طريق أن تكتب $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1)$ أوّلاً، فيصير المشتق $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$.

10. ج نعم، والنتيجة لافتة: $\frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$، أي المشتق نفسه لـ $\ln x$. والسبب أنّ $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$، والفرق بينهما ثابت.

11. ب نعم. وأسهل طريق أن تكتب $f(x) = \frac{1}{2}\ln x$ بقاعدة الدرس الثاني، فيصير المشتق نصف $\frac{1}{x}$.

12. أ نعم. المبرهنة تنقل الاشتقاق من u إلى $\ln \circ u$ على المجال نفسه، ما دام الشرطان محقّقين عليه.

مشتقّ التابع المركّب ln∘u . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 147 إلى 147 . basita123.com