

الرياضيات، البكالوريا، الفرع العلمي

ورقة تمارين: دراسة التابع اللوغاريتمي $\ln$

التابع اللوغاريتمي . 12 أسئلة . اختر إجابة واحدة لكل سؤال

1. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x$ ؟

(أ) لا توجد، لأنّ التابع يستقرّ عند سقف

(ب) $+\infty$

(ج) 1

2. ما قيمة $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \ln x$ ؟

(أ) 0

(ب) $+\infty$ (ج) $-\infty$ **3. لأيّ قيم العدد الحقيقي m يكون للمعادلة $\ln x = m$ حلّ في $]0, +\infty[$ ؟**(أ) لكلّ m حقيقي، والحلّ وحيد(ب) للقيم الموجبة من m فقط(ج) للقيم غير المعدومة من m فقط**4. ما قيمة $\ln(e^3)$ ؟**(أ) $3 \ln e$ (ب) e

(ج) 3

5. ما قيمة e^0 ؟

(أ) 0

(ب) 1

(ج) e **6. حلّ المعادلة $\ln(1 - 2x) = -2$ في المجال $]-\infty, \frac{1}{2}[$.**(أ) $x = \frac{1 - e^{-2}}{2}$ (ب) $x = \frac{1 + e^{-2}}{2}$ (ج) $x = \frac{1}{2} - 1$

7. حلّ المعادلة $(\ln x)^2 = 16$.

(أ) $\mathcal{S} = \{e^{-4}, e^4\}$

(ب) $\mathcal{S} = \{e^4\}$

(ج) $\mathcal{S} = \{4, -4\}$

8. حلّ المتراجحة $\ln(2 - x) \geq 1$.

(أ) $\mathcal{S} =]-\infty, 1]$

(ب) $\mathcal{S} =]-\infty, 2 - e]$

(ج) $\mathcal{S} = [2 - e, 2[$

9. ما ميل المماس للخط البياني للتابع $\ln$ عند النقطة التي فاصلتها x_0 ؟

(أ) $\ln(x_0)$

(ب) x_0

(ج) $\frac{1}{x_0}$

10. ما معادلة المماس للخط البياني للتابع $\ln$ في النقطة $B(e, 1)$ ؟

(أ) $y = \frac{x}{e}$

(ب) $y = \frac{x}{e} - 1$

(ج) $y = x - 1$

11. ما المقارب للخط البياني للتابع $\ln$ ؟

(أ) محور الفواصل

(ب) لا مقارب له

(ج) محور الترتيب

12. لإثبات أنّ $\ln x < 2\sqrt{x}$ عند كلّ $x > 0$ ، ما الطريق الذي يسلكه الكتاب ؟

(أ) التحقّق من المتراجحة عند عددٍ كافٍ من القيم

(ب) دراسة اطراد التابع $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$ وإيجاد أصغريّته

(ج) رفع الطرفين إلى المربّع للتخلّص من الجذر

سَلَم التصحيح

1. ب نعم. يصعد التابع بلا حدّ، وإن كان صعوده بطيئاً: للوصول إلى الارتفاع M يكفي أن نتجاوز الفاصلة 2^n حيث $n > \frac{M}{\ln 2}$.
2. ج نعم، ومحور الترتيب مقارب شاقوليّ للخطّ البياني. يُبرهن ذلك بتغيير المتحوّل $u = \frac{1}{x}$.
3. أ نعم. التابع مستمرّ ومتزايدٌ تماماً وصورته $\mathbb{R}$ كاملة، فهو تقابل من $]0, +\infty[$ إلى $\mathbb{R}$.
4. ج نعم، وهذا معنى الرمز نفسه: e^3 هو العدد الذي لوغاريتمه 3.
5. ب نعم، لأنّ e^0 هو الحلّ الوحيد للمعادلة $\ln x = 0$ ، وهذا الحلّ هو 1.
6. أ نعم. بوضع $u = 1 - 2x$ تصير المعادلة $\ln u = -2$ وحلّها $u = e^{-2}$ ، ثمّ نعود إلى x .
7. أ نعم. بوضع $z = \ln x$ تصير $z^2 = 16$ أي $z = 4$ أو $z = -4$ ، ثمّ نعود بـ $x = e^z$.
8. ب نعم. نكتب $1 = \ln e$ ، فتكافئ المتراجحة $2 - x \geq e$ أي $x \leq 2 - e$ ، وهذا داخل مجموعة التعريف $x < 2$.
9. ج نعم، لأنّ $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. ولاحظ أنّ الميل موجبٌ دائماً ويصغر كلّما ابتعدنا يميناً.
10. أ نعم، وهو يمرّ بمبدأ الإحداثيات. الميل $\frac{1}{e}$ ، والحَدّان الباقيان $\ln e - 1 = 0$.
11. ج نعم، وهو مقاربٌ شاقوليّ يتبع من $\lim_{x \rightarrow 0, x > 0} \ln x = -\infty$. ولا يُرسم عادةً خطّاً منفصلاً لأنّه المحور نفسه.
12. ب نعم. المشتق $\frac{x-1}{x(\sqrt{x}+1)}$ ينعدم عند 1، والأصغريّة $f(1) = 2$ موجبة، فالفرق موجبٌ على المجال كلّهُ.

دراسة التابع اللوغاريتمي ln . المصدر: الرياضيات، الجزء الأول، الصفحات 143 إلى 146 . basita123.com